# أولاً
# الجبر
# الصف الأول الثانوى
# الفصل الدراسى الثانى

# المصفوفات

**المصفوفة** هى مجموعة من العناصر ( أعداد أو عناصر ) موضوعة على هيئة صفوف وأعمدة ومحاطة بين قوسين

---

**مثال ١** إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٩ & ٥ & ٤ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٦ & ١ & ٨ \\ ٣ & ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \end{pmatrix}$

أكتب نظام كل مصفوفة ثم أوجد $أ_{١٢} + أ_{٣٢} + أ_{٢١}$

، $ب_{١٢} + ب_{٣١} - ب_{٢٢}$ ، $ج_{٢١} + أ_{٣٢}$

الحـــــــل

أ مصفوفة على النظام ٣×٣ ، ب مصفوفة على النظام ٢×٣ ، ج مصفوفة على النظام ١×٢

$أ_{١٢} = ٤$ ، $أ_{٣٢} = ٩$ ، $أ_{٢١} = ٢$

$أ_{١٢} + أ_{٣٢} + أ_{٢١} = ٤ + ٩ + ٢ = ١٥$

$ب_{١٢} + ب_{٣١} - ب_{٢٢} = ٢ + ٦ - ٧ = ١$

$ج_{٢١} + أ_{٣٢} = ٧ + ٩ = ١٦$

---

**مثال ٢** أكتب المصفوفة أ ( $أ_{ص ع}$ ) على النظام ٣×٢ حيث $أ_{ص ع} = ٢ص - ع + ٢$ الحـــــل

المصفوفة أ التى على النظام ٣×٢ هى $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... ... & ... ... \\ ... ... & ... ... \\ ... ... & ... ... \end{pmatrix}$

$أ_{١١} = ٢×١ - ١ + ٢ = ٣$ ، $أ_{١٦} = ٢×١ - ٢ + ٢ = ٢$ ، $أ_{١٢} = ٢×٢ - ١ + ٢ = ٥$

$أ_{٢٢} = ٢×٢ - ٢ + ٢ = ٤$ ، $أ_{١٣} = ٢×٣ - ١ + ٢ = ٧$ ، $أ_{٢٣} = ٢×٣ - ٢ + ٢ = ٦$

**تدريب** المصفوفه ا = $\begin{pmatrix} ٦ & ١ & ٨ \\ ٣ & ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ على النظام ......................

، المصفوفه ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٩ & ٥ & ٤ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ على النظام ......................

ثم أوجد ١) ا٢٢ + ا٣١ = ..................  ٢) ب١٢ + ب٢٣ = .........................

---

## أنواع المصفوفات :

١) **مصفوفة الصف :** هى التى تتكون من صف واحد وعدة أعمدة

مثال على مصفوفة الصف $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ صف واحد وثلاث أعمدة على النظام ١×٣

---

٢) **مصفوفة الأعمدة :** هى التى تتكون من عمود واحد وعدة صفوف

**مثال** على مصفوفة العمود $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \\ ٧ \end{pmatrix}$ ثلاث صفوف وعمود واحد على النظام ٣×١

---

٣) **المصفوفة المربعة :** هى المصفوفة التى عدد صفوفها يساوى عدد أعمدتها

**مثال** $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٩ & ٥ & ٤ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظام ٣×٣ **مثال** $\begin{pmatrix} ٧ & ٨ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظام ٢×٢

---

٤) **المصفوفة الصفرية :** هى المصفوفة التى جميع عناصرها تساوى صفر

**مثال** $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ويرمز لها بالرمز ☐

---

٥) **المصفوفة القطرية :** هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسى

**مثال** $\begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

---

١) **مصفوفة الوحدة :** هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا عناصر القطر الرئيسى يساوى واحد صحيح

مثال $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ويرمز لها بالرمز I

## تساوى مصفوفتين

### شرط تساوى مصفوفتان

١) المصفوفتان على نفس النظام  ٢) جميع العناصر المتناظرة متساوية

---

**مثال١** إذا كان $\begin{pmatrix} ٧ & ٢\text{س} - ٥ \\ ٣\text{ص} + ١٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٧ \\ \text{ص} + ١٦ & ١ \end{pmatrix}$ أوجد س ، ص

**الحــــــل**

$٢\text{س} - ٥ = ٧$

$٢\text{س} = ٧ + ٥$

$٢\text{س} = ١٢$ ∴ $\text{س} = ٦$

$٣\text{ص} + ١٠ = \text{ص} + ١٦$

$٣\text{ص} - \text{ص} = ١٦ - ١٠$

$٢\text{ص} = ٦$ ∴ $\text{ص} = ٣$

---

**مثال٢** إذا كان $\begin{pmatrix} ١٥ & ٨ \\ \text{ص} + \text{ع} & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}^{٢} - ١ & \text{ل}^{٣} \\ ٨ & \text{ص} \end{pmatrix}$ أوجد س ، ص ، ع

**الحــــــل**

$\text{ل}^{٣} = ٨$

$\text{ل} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

$\text{س}^{٢} - ١ = ١٥$

$\text{س}^{٢} = ١٥ + ١$

$\text{س}^{٢} = ١٦$  $\text{س} = \pm ٤$

$\text{ص} = -١$

$\text{ص} + \text{ع} = ٨$

$-١ + \text{ع} = ٨$

$\text{ع} = ٨ + ١ = ٩$

---

**تدريب** إذا كان $\begin{pmatrix} -٤ & \text{س}^{٢} - ١ \\ ٢\text{ص} - ٩ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ & ٨ \\ -\text{ص} & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد س ، ص

**الحــــــل**

## ضرب عدد حقيقى فى مصفوفه

**مثال ١** إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد ٢أ ، -أ ، -٣أ

**الحـــــــل**

$٢أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ١٤ & ٤ \end{pmatrix}$

، $-أ = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -٧ & -٢ \end{pmatrix}$

، $-٣أ = \begin{pmatrix} -٣ & ٦ \\ -٢١ & -٦ \end{pmatrix}$

---

## مدور المصفوفة

لإيجاد مدور أى مصفوفة نستبدل الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف

**مثال ١** إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٦ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد $أ^{مد}$ **الحـــــــل**

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & -٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

---

**مثال ٢** إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ٩ & ٦ & ٣ \\ ١٢ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد $أ^{مد}$ ثم أوجد $(أ^{مد})^{مد}$ **الحـــــــل**

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٨ & ٦ & ٤ \\ ١٢ & ٩ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $(أ^{مد})^{مد} = \begin{pmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ٩ & ٦ & ٣ \\ ١٢ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$

لاحظ أن $أ = (أ^{مد})^{مد}$

---

**تدريب** إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٩ & ٥ & ٤ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ أوجد $أ^{مد} =$

---

**تدريب** إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \\ ٧ \end{pmatrix}$

أوجد $أ^{مد} =$ أوجد $ب^{مد} =$

# المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة

١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإنها تسمى متماثلة إذا كان أ = أ^مد

**مثال١** إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٧ \\ ٥ & ٩ & ٣ \\ ٠ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد أ^مد **الحـــــــل**

أ^مد = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٧ \\ ٥ & ٩ & ٣ \\ ٠ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

لاحظ أن أ = أ^مد  أ٢١ = أ١٢ ، أ٣١ = أ١٣ ، أ٣٢ = أ٢٣

**ملحوظه هامه** إذا كانت أ مصفوفه متماثلة فإن أ − أ^مد = ☐

٢) إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإنها تسمى شبه متماثلة إذا كان أ = − أ^مد

**مثال٢** إذا كان أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٠ \\ ٦ & ٠ & -٤ \\ ٠ & -٦ & ١ \end{pmatrix}$ أوجد أ^مد **الحـــــــل**

أ^مد = $\begin{pmatrix} ١ & -٤ & ٠ \\ -٦ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ٦ & -١ \end{pmatrix}$ = − $\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٠ \\ ٦ & ٠ & -٤ \\ ٠ & -٦ & ١ \end{pmatrix}$ = − أ

∵ أ = − أ^مد ∴ أ مصفوفة شبه متماثلة

**ملحوظه هامه** إذا كانت أ مصفوفه شبه متماثلة فإن أ + أ^مد = ☐

**مثال٣** إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & س & ٢ \\ ص & ٦ & ٣ \\ ٠ & -٤ & ٥ \end{pmatrix}$ أوجد س ، ص إذا كانت

١) أ مصفوفة متماثلة ٢) أ مصفوفة شبه متماثلة **الحـــــــل**

اذا كانت أ مصفوفة متماثلة فإن س = ٣ ، ص = −٤

اذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة فإن س = −٣ ، ص = ٤





أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**مثال٤** إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٤س & ٢ \\ ٥ & ٢ & -٨ \\ ٠ & ٥ & س+٣ص \end{pmatrix}$ مصفوفه متماثلة

أوجد س ، ص

**الحـــــل** ∵ المصفوفة أ متماثلة

∴ ٤س = −٨ ، س + ٣ص = ٤

∴ س = $\frac{-٨}{٤}$ = −٢ ∴ −٢ + ٣ص = ٤

∴ ٣ص = ٤ + ٢

∴ ٣ص = ٦ ∴ ص = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

---

**تدريب١** إذا كان المصفوفه $\begin{pmatrix} ٢س & ٨ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ متماثلة أوجد س

---

**تدريب٢** إذا كان المصفوفه $\begin{pmatrix} ٢س & ٨ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة أوجد س

---

## جمع وطرح المصفوفات

شرط جمع مصفوفتان ان تكون المصفوفتان على نفس النظام

**مثال١** إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ١ & -٢ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب **الحـــــل**

أ + ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ١ & -٢ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٧ & ٧ \\ ٥ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$

---

**مثال٢** إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٦ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ -٥ & ١ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix}$ أوجد أ + بمد **الحـــل**

أ + بمد = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٦ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٦ \\ ٢ & -٥ & -٢ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٩ & -١ & ٦ \\ -٢ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$

**مثال ٣** إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

أوجد ٣أ – ٢ب

**الحـــــــل**

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ 2 & -2 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{٣أ – ٢ب}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & -5 \\ 11 & -2 & -8 \end{pmatrix} =$$

---

**مثال ٤** إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -5 & 12 & 4 \\ 3 & 21 & 10 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث ٢ أ + ب – س = ▭

**الحـــــــل**

س = ٢ أ + ب

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -5 & 12 & 4 \\ 3 & 21 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 6 & -4 \\ 4 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \text{س}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 1 & 18 & 0 \\ 7 & 31 & 18 \end{pmatrix} =$$

---

**تدريب ١** إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفه س والتى تحقق أن أ + س = ٢ب

**الحـــــــل**

## خاصيه هامه $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

---

**مثال** إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

حقق أن $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

**الحـــــــل**

$\text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (١)

، $\text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

---

**مثال** إذا كان $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 3\text{ك} & -\text{ص} \\ 2\text{س} & 11 \end{pmatrix}$

**الحـــــــل**

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\text{ك} & -\text{ص} \\ 2\text{س} & 11 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\text{ك} & -\text{ص} \\ 2\text{س} & 11 \end{pmatrix}$

| | | |
|---|---|---|
| $3\text{ك} = 3$ | $6 = -\text{ص}$ | $-6 = 2\text{س}$ |
| $\text{ك} = 1$ | $\text{ص} = -6$ | $\text{س} = -3$ |

# ضرب المصفوفات

**شرط ضرب مصفوفتين :** أن تكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية

---

**مثال ١** إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ أوجد أ ب

**الحـــــل**

أ ب = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\times2+3\times2+1\times3 & 2\times1+3\times4+1\times1 \\ 1\times2+1\times2+2\times3 & 1\times1+1\times4+2\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$

لاحظ أن أ$_{2\times3}$ ، ب$_{3\times2}$ يكون حاصل الضرب على النظام ٢×٢ الحـــــل

---

**مثال ٢** إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ أوجد أ ب **الحـــــل**

أ ب = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3+0 & 6-3 \\ -2+0 & 4+12 \\ 0+0 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 16 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

---

**تدريب ١** إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

أوجد أ ب ، ب أ وماذا تلاحظ **الحـــــل**

أ ب = $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ = ( ........... ........... ) = ( ...... ...... )

ب أ = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ = ( ........... ........... ) = ( ...... ...... )

∴ أ ب ≠ ب أ أى أن الضرب ليس ابداليا

## مثال١ إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ١- & ٦ \end{pmatrix}$ أوجد أ I الحل

$$أ I = \begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ١- & ٦ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣- + ٠ & ٠ + ٢ \\ ١- + ٠ & ٠ + ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ١- & ٦ \end{pmatrix}$$

أى أن المحايد الضربى هو مصفوفة الوحده I

---

## مثال٢ إذا كان $س = \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ أثبت أن $س^٢ - ٢س - ٣I = \square$ الحل

$$س^٢ = \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix}$$

$$\therefore س^٢ - ٢س - ٣I = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤- \\ ٠ & ٦- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣- & ٠ \\ ٠ & ٣- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$$

---

## تدريب ٢ إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ أثبت أن $أ^٢ - ٥أ - ٢I = \square$ الحل

---

## واجب إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix}$ أثبت أن $أ^٢ - ٥أ + ٢I = \square$ الحل

## مدور حاصل ضرب مصفوفتين $(أ\ ب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$

**مثال ٣** إذا كان المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٧ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٦ \\ ٩ & -٣ \\ -٨ & ٢ \end{pmatrix}$

فحقق أن $(أ\ ب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$ **الحـــل**

$$أ\ ب = \begin{pmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٧ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٦ \\ ٩ & -٣ \\ -٨ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣٩ & ٢٣ \\ -٨ & ١٧ \end{pmatrix}$$

$$(أ\ ب)^{مد} = \begin{pmatrix} ١٧ & ٢٣ \\ -٨ & -٣٩ \end{pmatrix} \quad (١)$$

$$ب^{مد} \times أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ & ٦ \\ -٨ & ٩ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -١ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣٩ & ٢٣ \\ -٨ & ١٧ \end{pmatrix} \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن $(أ\ ب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$

---

**تدريب ٣** إذا كان المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

إثبت أن $(أ\ ب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$ **الحـــل**

---

**مثال ٤** إذا كان المصفوفة أ على النظام ٣×٢ ، المصفوفة ب على النظام ٢×٣ فإن حاصل ضرب أ ب تكون على النظام .........

**مثال ٥** إذا كان المصفوفة أ على النظام ٢×٣ ، $ب^{مد}$ على النظام ١×٣ فإن حاصل ضرب أ ب تكون على النظام ......


أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

# المحددات

**محدد الرتبه الثانيه :**

**طريقة فك محدد الرتبه الثانيه** $\begin{vmatrix} ب & م \\ ء & جـ \end{vmatrix} = م\,ء - ب\,جـ$

---

**مثال١** أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ٨ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ١٥ - ١٦ = -١$

---

**مثال٢** أوجد قيمة $\begin{vmatrix} -٧ & ٤ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} = ٢٤ + ١٤ = ٣٨$

---

**مثال٣** أوجد قيمة $\begin{vmatrix} -٤ & -٨ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = -٢٤ + ٢٤ = ٠$

---

**تدريب٢** أوجد قيمة كلاً من $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٣ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} -٥ & ٣ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} -١٢ & -٤ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٣ \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} -٥ & ٣ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} -١٢ & -٤ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} =$

---

**مثال٤** أوجد قيمة $\begin{vmatrix} جتا\theta & جا\theta \\ جا\theta & -جتا\theta \end{vmatrix} = جا^{٢}\theta + جتا^{٢}\theta = ١$

---

**مثال٥** أوجد قيمة س إذا كان $\begin{vmatrix} -٢ & ٢س \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٦$ الحـــــل

$\therefore ٢س + ٨ = ٦$ $\therefore ٢س = ٦ - ٨$ $\therefore ٢س = -٢$ $\therefore س = -١$

---

**تدريب٣** أوجد قيمة س إذا كان $\begin{vmatrix} ٢ & ٢س \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ١٠$ الحـــــل

## محدد الرتبه الثالثه :

**مثال ٦** أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ & -١ \end{vmatrix}$$

الحـــل

يراعى قاعدة الاشارات

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ & -١ \end{vmatrix} = ٢ \, (٢ \times -١ \; - \; ٥ \times -١) - ٣ \, (١ \times -١ \; - \; ٥ \times ٣) + (١ \times -١ \; - \; ٢ \times ٣)$$

$= ٢ \, (-٢ + ٥) - ٣ \, (-١ - ١٥) + (-١ - ٦) \quad = \quad ٢ \, (٣) - ٣ \, (-١٦) + (-٧)$

$= ٦ + ٤٨ - ٧ = ٤٧$

---

**مثال ٧** أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} -٣ & -٢ & -٥ \\ -٢ & ٤ & ١ \\ ٧ & -٣ & ٦ \end{vmatrix}$$

الحـــل

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ -٣ & -٢ & -٥ \\ -٢ & ٤ & ١ \\ ٧ & -٣ & ٦ \end{vmatrix} = -٣ \, (٤ \times ٦ \; - \; ١ \times -٣) + ٢ \, (-٢ \times ٦ \; - \; ١ \times ٧) - ٥ \, (-٢ \times -٣ - ٤ \times ٧)$$

$= -٣ \, (٢٤ + ٣) + ٢ \, (-١٢ - ٧) - ٥ \, (٦ - ٢٨)$

$= -٣ \, (٢٧) + ٢ \, (-١٩) - ٥ \, (-٢٢) = -٨١ - ٣٨ + ١١٠ = -٩$

---

**المصفوفه المثلثيه :** هى مصفوفه جميع عناصرها التى فوق أو تحت القطر الرئيسى تساوى صفر

**قيمة محدد المصفوفه المثلثيه = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى**

---

**مثال ٨** أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} -٣ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٢ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٧ \end{vmatrix} = -٣ \times ٢ \times ٧ = -٤٢$$

---

**مثال ٩** أوجد قيمة س إذا كان

$$\begin{vmatrix} س & ٠ & ٠ \\ -١ & ٢ & ٠ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = ١٢$$

الحـــل

$س \times ٢ \times ٣ = ١٢ \qquad \therefore ٦ س = ١٢ \qquad \therefore س = \frac{١٢}{٦} = ٢$

## مثال ١٠ أوجد مستخدماً المحددات مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه (-٤،٢) ، (٣،١) ، (-٢،٥)

### الحل

$$\text{م} = \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} -٤ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ١ \\ -٢ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\, -٤(١-٥) - ٢(٣+٢) + ١(١٥+٢) \,\right]$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\, -٤(-٤) - ٢(٥) + ١(١٧) \,\right]$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\, ١٦ - ١٠ + ١٧ \,\right] = \frac{١}{٢} \times ٢٣ = ١١.٥$$ وحده مربعة

---

**تدريب** أوجد مستخدماً المحددات مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه (٢،٤) ، (٥،٢) ، (-٣،-٢)

---

## مثال ١١ باستخدام المحددات أثبت أن النقاط (٣،٥) ، (٤،-١) ، (٥،-٧) تقع على استقامه واحده

### الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ١ \\ ٤ & -١ & ١ \\ ٥ & -٧ & ١ \end{vmatrix} = ٣(-١+٧) - ٥(٤-٥) + (-٢٨+٥)$$

$$= ٣(٦) - ٥(-١) + (-٢٣) = ١٨ + ٥ - ٢٣ = ٠$$

∴ النقاط تقع على استقامه واحده

---

## مثال ١٢ باستخدام كرامر أوجد مجموعة حل المعادلات ٢س - ٣ص = ٣ ، س + ٢ص = ٥ الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٤ + ٣ = ٧$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٣ & -٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٦ + ١٥ = ٢١ \qquad \therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{٢١}{٧} = ٣$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ - ٣ = ٧ \qquad \therefore \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{٧}{٧} = ١$$

∴ م.ح = {(٣،١)}

**تدريب** باستخدام كرامر أوجد مجموعة حل المعادلات ٢ س = ٣ ص + ٥ ، ٣ س + ٤ ص = −١ الحل

---

**مثال ١٤** باستخدام كرامر أوجد مجموعة حل المعادلات ٢س + ص − ع = ٣ ، س + ص + ع = ١ ، س − ٢ص − ٣ع = ٤

**الحل**

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & -٣ \end{vmatrix} = ٢(-٣+٢) - (-٣-١) - (-٢-١)$$

$$= ٢(-١) - (-٤) - (-٣) = -٢+٤+٣ = ٥$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ٤ & -٢ & -٣ \end{vmatrix} = ٣(-٣+٢) - (-٣-٤) - (-٢-٤)$$

$$= ٣(-١) - (-٧) - (-٦) = -٣+٧+٦ = ١٠$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٤ & -٣ \end{vmatrix} = ٢(-٣-٤) - ٣(-٣-١) - (٤-١)$$

$$= ٢(-٧) - ٣(-٤) - (٣) = -١٤+١٢-٣ = -٥$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٢(٤+٢) - (٤-١) + ٣(-٢-١)$$

$$= ٢(٦) - (٣) + ٣(-٣) = ١٢-٣-٩ = \text{صفر}$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{١٠}{٥} = ٢ \quad ، \quad \therefore ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٥}{٥} = -١ \quad ، \quad \therefore ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{\text{صفر}}{٥} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{م.ح} = \{(٢ ، -١ ، ٠)\}$$


أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

# المعكوس الضربى

لأى عددين حقيقيين يكون كل منهما معكوس ضربى للأخر إذا كان حاصل ضربهما = ١

مثال١ $٣ \times ٣^{-١} = ١$ مثال٢ $س \times س^{-١} = ١$

---

لأى مصفوفتان يكون كل منهما معكوس ضربى للأخر إذا كان حاصل ضربهما = I

**مثال** $أ \times أ^{-١} = I$

ويسمى $أ^{-١}$ بالمعكوس الضربى للمصفوفه أ

ويكون للمصفوفه أ معكوس ضربى إذا كان محدد أ $\neq$ صفر

---

## خطوات إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفه أ

١) نوجد محدد أ = $\Delta$ حيث $\Delta \neq$ صفر

٢) نبدل عنصرى القطر الرئيسى

٣) نغير إشارة عنصرى القطر الفرعى

٤) نضرب المصفوفه الناتجه فى $\frac{١}{\Delta}$

---

**مثال١** أوجد المعكوس الضربى للمصفوفه أ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix}$

الحـــــــــل

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٦ \end{vmatrix} = ١٨ - ٢٠ = -٢$ $\Delta \neq$ صفر

$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{pmatrix} ٦ & -٥ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & \frac{٥}{٢} \\ ٢ & \frac{-٣}{٢} \end{pmatrix}$

---

**مثال٢** أوجد المعكوس الضربى للمصفوفه أ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$

الحـــــــــل

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} = ١٨ - ١٨ = ٠$ $\Delta =$ صفر ∴ المصفوفه ليس لها معكوس ضربى

تدريب أوجد المعكوس الضربى للمصفوفه أ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ الحـــــل

---

مثال ٣ أوجد قيمة س إذا كانت للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} س & ١ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ معكوس ضربى الحـــــل

المصفوفه لها معكوس ضربى إذا كان $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} \neq ٠$

$\therefore ٣س - ٦ \neq ٠$ $\qquad \therefore ٣س \neq ٦$

$\therefore س \neq \frac{٦}{٣}$ $\qquad \therefore س \neq ٢$

---

مثال إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} س & ٤ \\ ٩ & س \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربى فإن س ≠ ..........

المصفوفه لها معكوس ضربى إذا كان $\begin{vmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{vmatrix} \neq ٠$

$\therefore س^٢ - ٣٦ \neq ٠$ $\qquad \therefore س^٢ \neq ٣٦$ $\qquad \therefore س \neq \pm ٦$

أو س ∈ ح − $\{٦ ، -٦\}$

---

لاحظ أن ١) $(أ ب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١}$ ٢) $(أ^{-١})^{-١} = أ$

---

هام ١) أ سـ = جـ فإن سـ = $أ^{-١}$ جـ

٢) سـ أ = جـ فإن سـ = جـ $أ^{-١}$



أ/ أحمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**مثال** أوجد المصفوفه س والتى تحقق أن $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} \times$ س $= \begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

**الحـــــــل**

س $= \begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}^{-١}$ ← ١ ولإيجاد المعكوس الضربى

$\Delta = \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٠ + ٣ = ٣$ $\Delta \neq$ صفر

أ$^{-١} = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & ٠ \\ \frac{٢}{٣} & -١ \end{pmatrix}$ بالتعويض فى ١

س $= \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & ٠ \\ \frac{٢}{٣} & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

س $= \begin{pmatrix} ١ + ٠ \\ ٢ + ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

---

**تدريب** أوجد المصفوفه س والتى تحقق أن س $\times \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

**الحـــــــل**

## حل معادلتين باستخدام المصفوفات

$\text{ا}_{١}\,\text{س} + \text{ب}_{١}\,\text{ص} = \text{جـ}_{١}$ ، $\text{ا}_{٢}\,\text{س} + \text{ب}_{٢}\,\text{ص} = \text{جـ}_{٢}$

**نكون**

- مصفوفة المجاهيل
- المعكوس الضربى لمصفوفة المعاملات
- مصفوفة الثوابت

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ا}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{ا}_{٢} & \text{ب}_{٢} \end{pmatrix}^{-١} \begin{pmatrix} \text{جـ}_{١} \\ \text{جـ}_{٢} \end{pmatrix}$$

---

**مثال:** حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات

س + ص = ٥ ، ٢س − ص = ١ الحـــل

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}^{-١} \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$$ ← ١ نوجد المعكوس الضربى

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = -١ - ٢ = -٣$$

$$\text{ا}^{-١} = \frac{١}{-٣} \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{٢}{٣} & \frac{-١}{٣} \end{pmatrix}$$ بالتعويض فى ١

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{٢}{٣} & \frac{-١}{٣} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٥}{٣} + \frac{١}{٣} \\ \frac{١٠}{٣} + \frac{-١}{٣} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = ٣ ∴ م.ح = {(٢ ، ٣)}



أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**مثال ٧** حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات

س − ٢ص = −١ ، ٢س − ٣ص = ٠ الحـــــل

$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}^{-١} \begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$ نوجد المعكوس الضربى

$\triangle = \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = -٣ + ٤ = ١$

$أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ بالتعويض فى ١

$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ٠ \\ ٢ + ٠ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$ ∴ س = ٣ ، ص = ٢ ∴ م . ح = { ( ٣ ، ٢ ) }

---

**تدريب** حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات س + ٢ص = ٤ ، ٢س − ص = −٧

الحـــــل

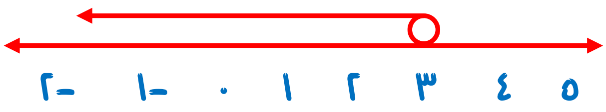


أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

# المتباينات الخطيه

**مثال١** أوجد مجموعة حل المتباينة ٣س - ٤ < ٥ فى ح **الحــــل**

٣س < ٥ + ٤




٣س < ٩

س < ٩/٣

س < ٣ ∴ م.ح = ] -∞ ، ٣ [

---

**مثال٢** أوجد مجموعة حل المتباينة -٣ < ٣س -٣ ≤ ٣ فى ح **الحــــل**

-٣ < ٢س -٣ ≤ ٣ بإضافة ٣ للمتباينة

-٣ + ٣ < ٢س -٣ + ٣ ≤ ٣ + ٣

٠ < ٢س ≤ ٦ بالقسمة على ٢

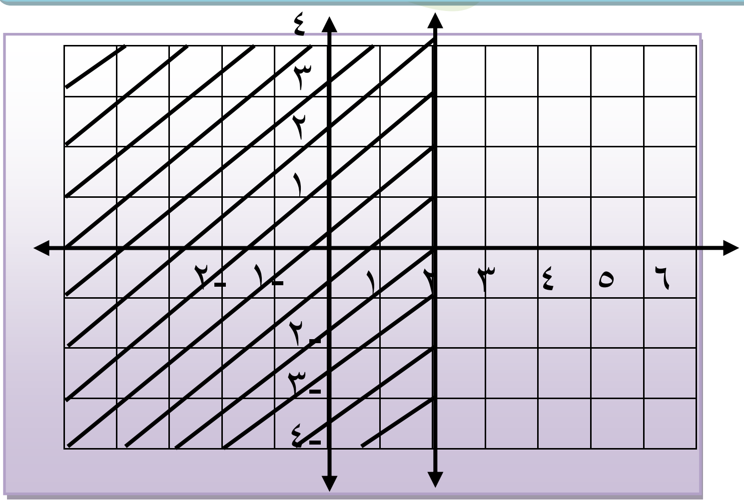
٠/٢ < ٢/٢ س < ٦/٢




٠ < س < ٣ ∴ م.ح = ] ٠ ، ٣ ]

---

**مثال٣** أوجد مجموعة حل المتباينة ٥س -٧ ≥ ٢ص -١ فى ح × ح **الحــــل**




٥س – ٢ص ≥ -١ + ٧

٣س ≥ ٦ بالقسمة على ٣

٣/٣ س ≥ ٦/٣

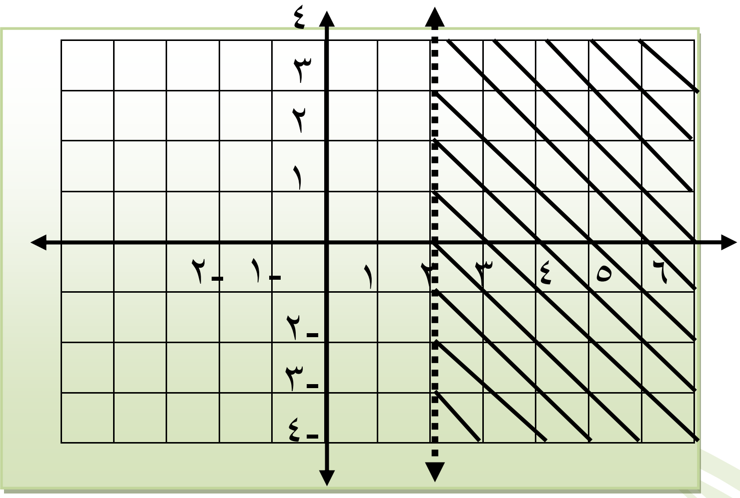
س ≥ ٢

تمثل بخط متصل




أ/ أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**مثال٤** أوجد مجموعة حل المتباينه ٢س+٢ < س + ٣ فى ح × ح الحـــــل




٢س − س < ٣ − ٢

س < ١

تمثل بخط متقطع

## خطوات حل المتباينه فى متغيرين

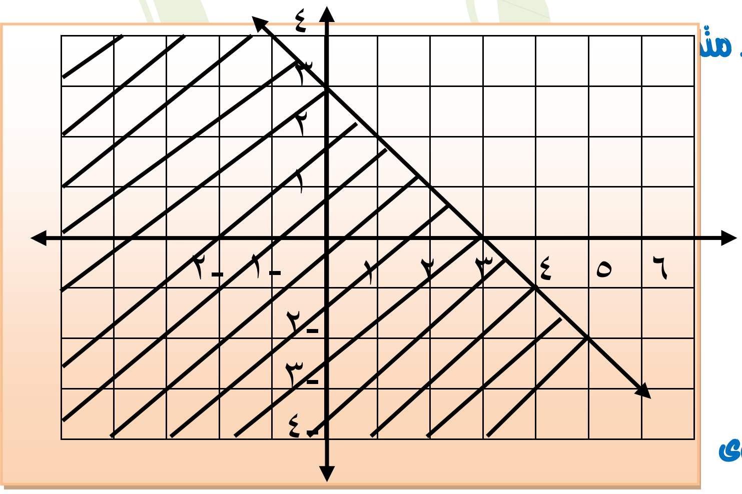
١) نرسم المستقيم الذى يمثل المعادله المناظره المتباينه

٢) إذا كانت المتباينه ( < أو > ) فإن المستقيم يكون متقطع

٣) إذا كانت المتباينه ( ≤ أو ≥ ) فإن المستقيم يكون متصل

٤) نأخذ نقطة أختبار لتكن ( ٠ ، ٠ ) ونبحث ما إذا كانت تحقق المتباينه أم لا

**مثال ٥** أوجد مجموعة حل المتباينه س+ص ≥ ٣ فى ح × ح الحـــــل




١) نرسم المستقيم ل : س + ص = ٣ بخط مت

| | | |
|---|---|---|
| س | ٠ | ٣ |
| ص | ٣ | ٠ |

٢) (٠،٠) تحقق المتباينه

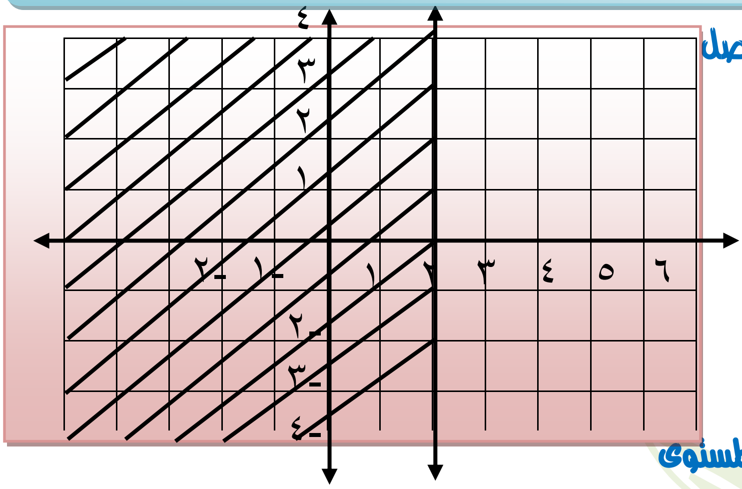
∴ وتكون مجموعة الحل هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى

الذى تنتمى اليه النقطة (٠،٠)




أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**مثال٦** أوجد مجموعة حل المتباينه س + ص ≤ ٣ فى ح × ح الحـــــــل




١) نرسم المستقيم ل : س + ص = ٣ بخط متصل

| س | ٠ | ٣ |
|---|---|---|
| ص | ٣ | ٠ |

٢) (٠،٠) تحقق المتباينه

∴ وتكون مجموعة الحل هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى

الذى تنتمى اليه النقطه (٠،٠)

---

**تدريب** أوجد مجموعة حل المتباينه س - ٣ص ≤ ٣ فى ح × ح الحـــــــل





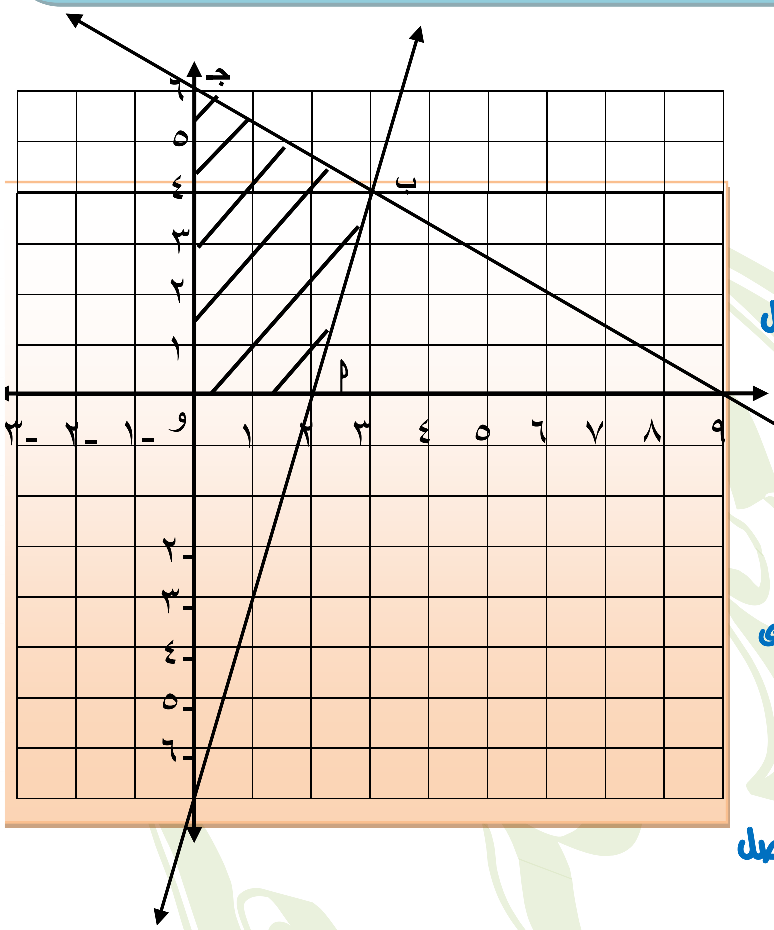
أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

## مثال٧ عين مجموعة حل المتباينات الآتيه معاً :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ٣ص ≤ ١٨ ، −٤س + ص ≥ −٨

ثم اوجد قيمة س ، ص التى تجعل دالة الهدف ر = ٢س + ص اكبر مايمكن

**الحـــــل**




١) المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الاول

٢) نرسم المستقيم ٢س + ٣ص = ١٨ بخط متصل

| س | ٠ | ٩ |
|---|---|---|
| ص | ٦ | ٠ |

(٠،٠) تحقق المتباينة

وتكون مجموعة الحل هى المستقيم ل١ ∪ نصف المستوى

الذى تنتمى اليه النقطة (٠،٠)

٣) نرسم المستقيم −٤س + ص = −٨ بخط متصل

| س | ٠ | ٢ |
|---|---|---|
| ص | −٨ | ٠ |

(٠،٠) تحقق المتباينه وتكون مجموعة الحل المستقيم ل٢ ∪ نصف المستوى الذى تنتمى اليه النقطة (٠،٠)

∴ مجموعة حل المتباينات هى المنطقة ا ب جـ و

٤) نحدد رؤوس الشكل ا ب جـ و و(٠،٠) ، ا = (٢،٠) ، ب = (٣،٤) ، جـ = (٠،٦)

ر = ٢س + ص

ر و = ٠×٠ + ٠ = ٠ ر ا = ٢×٢ + ٠ = ٤

ر ب = ٢×٣ + ٤ = ٧ ر جـ = ٢×٠ + ٦ = ٦

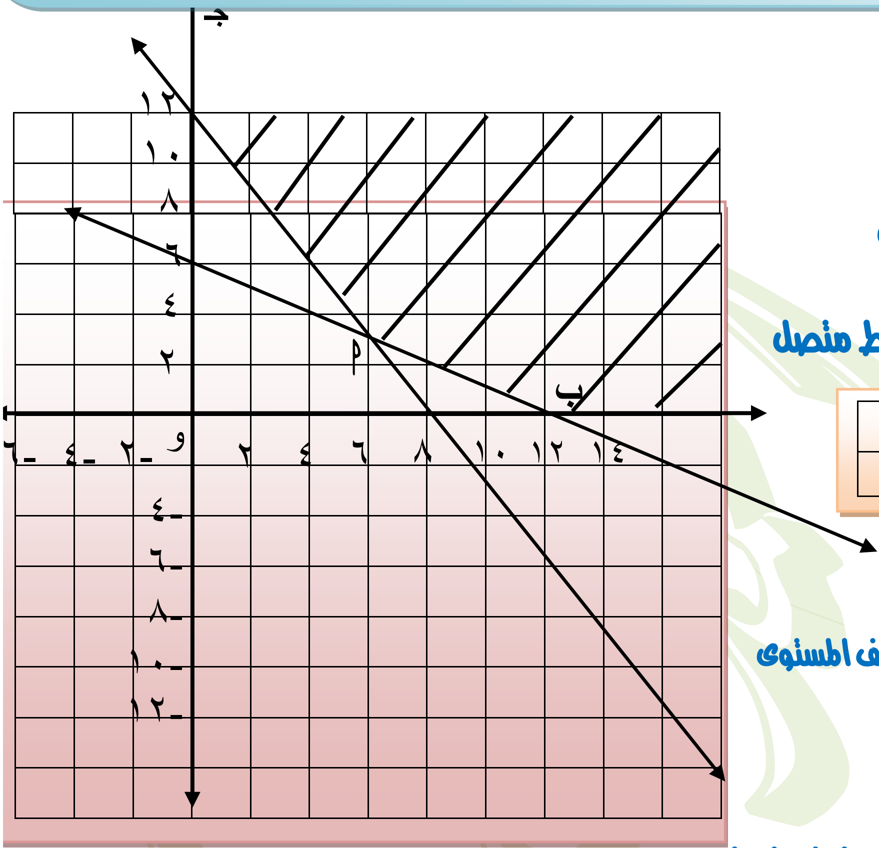
اكبر قيمة لدالة الهدف عند النقطة ب = (٣،٤) س = ٣ ، ص = ٤

## مثال٨ عين مجموعة حل المتباينات الاتيه معاً :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≥ ١٢ ، ٣س + ٢ص ≥ ٢٤

ثم اوجد قيمة س ، ص التى تجعل دالة الهدف ر = ٣س + ٤ص اقل مايمكن

**الحــــل**




١) المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الاول

٢) نرسم المستقيم س + ٢ص = ١٢ بخط متصل

| | | |
|---|---|---|
| س | ٠ | ١٢ |
| ص | ٦ | ٠ |

(٠،٠) لا تحقق المتباينه

وتكون مجموعة الحل هى المستقيم ل١ ∪ نصف المستوى

الذى لا تنتمى اليه النقطه (٠،٠)

٣) نرسم المستقيم ٣س + ٢ص = ٢٤ بخط متصل

| | | |
|---|---|---|
| س | ٠ | ٨ |
| ص | ١٢ | ٠ |

(٠،٠) لا تحقق المتباينه وتكون مجموعة الحل المستقيم ل٢ ∪ نصف المستوى الذى لا تنتمى اليه النقطه (٠،٠)

∴ مجموعة حل المتباينات هى المنطقة المظللة والمجدده بالنقاط أ ب جـ

٤) نحدد رؤوس الشكل أ ب جـ أ = (٦ ، ٣) ، ب = (١٢ ، ٠) ، جـ = (٠ ، ١٢)

ر = ٣س + ٤ص

رأ = ٣ × ٦ + ٤ × ٣ = ١٨ + ١٢ = ٣٠

رب = ٣ × ١٢ + ٤ × ٠ = ٣٦ + ٠ = ٣٦ رجـ = ٣ × ٠ + ٤ × ١٢ = ٠ + ٤٨ = ٤٨

أقل قيمة لدالة الهدف عند النقطة أ = (٦ ، ٣) س = ٦ ، ص = ٣

**مثال** مصنع للملابس ينتج نوعين من العبايات حريمى و رجالى ويلزم لعمل عبايه حريمى متراً من الصوف ومتران من القطن ، ويلزم لعمل عبايه رجالى متران من الصوف ومتران من القطن ، وكان لدى المصنع ٤٢ متراً من الصوف و ٥٤ من القطن ، فإذا كان ثمن بيع العبايه الحريمى ١٠٠ جنيه وثمن بيع العبايه الرجالى ١٥٠ جنيهاً ، فما عدد العبايات التى يجب أن ينتجها المصنع من كل نوع ليحصل على أكبر دخل ؟ علماً بأن المصنع يبيع كل إنتاجه

## الحـــــــــــل

| | حريمى | رجالى | |
|---|---|---|---|
| الصوف | ١ | ٢ | ٤٢ |
| القطن | ٢ | ٢ | ٥٤ |

دالة الهدف ر = ١٠٠س + ١٥٠ ص

**نترجم البيانات الى نظام من المتباينات**

١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠    ٢) س + ٢ص ≤ ٤٢    ٣) ٢س + ٢ص ≤ ٥٤

١) المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الاول

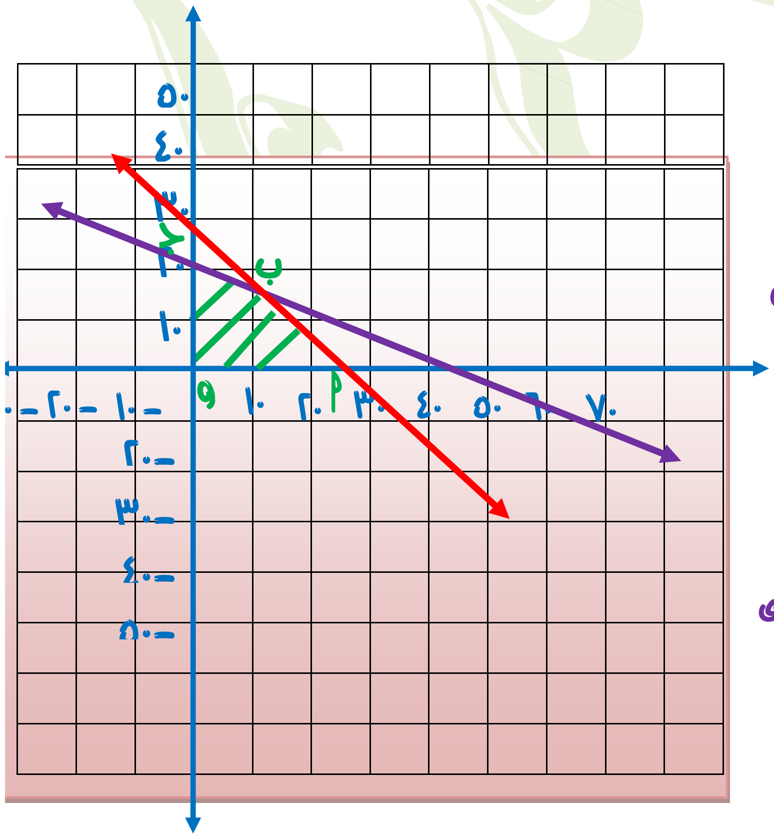
٢) نرسم المستقيم س + ٢ ص = ٤٢ بخط متصل

| س | ٠ | ٤٢ |
|---|---|---|
| ص | ٢١ | ٠ |

(٠،٠) تحقق المتباينه

وتكون مجموعة الحل هى المستقيم ل١ ∪ نصف المستوى

الذى تنتمى اليه النقطة (٠،٠)






أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

٣ ) نرسم المستقيم ٢ س + ٢ ص = ٥٤ بخط متصل

| س | ٠ | ٢٧ |
|---|---|---|
| ص | ٢٧ | ٠ |

( ٠،٠ ) تحقق المتباينه وتكون مجموعة الحل المستقيم ل٣ ∪ نصف المستوى الذى تنتمى اليه النقطه ( ٠،٠ )

∴ مجموعة حل المتباينات هى المنطقه المظلله والمحدده بالنقاط و ٩ ب جـ

٤) نحدد رؤوس الشكل و ٩ ب جـ و = ( ٠،٠ ) ، ٩ = ( ٢٧ ، ٠ ) ، ب = ( ١٢، ١٥ ) ، جـ = ( ٠، ١٢ )

دالة الهدف ر = ١٠٠س + ١٥٠ ص

ر و = ١٠٠× ٠ + ١٥٠ × ٠ = ٠

ر ٩ = ١٠٠ × ٢٧ + ١٥٠ × ٠ = ١٨ + ١٢ = ٢٧٠٠

ر ب = ١٠٠ × ١٢ + ١٥٠ × ١٥ = ٣٦ + ٠ = ٣٤٥٠

ر جـ = ١٠٠ × ٠ + ١٥٠ × ١٢ = ٠ + ٤٨ = ١٨٠٠

∴ النقطه ب ( ١٢، ١٥ ) تحقق أكبر دخل للمصنع أى عندما يكون عدد العبايات الحريمى ١٢ وعدد العبايات الرجالى ١٥

---

**تدريب** مصنع ينتج نوعين من الاثاث وكل منهما يلزم لانتاجه نوعين من الماكينات ٩ ، ب ويلزم لإنتاج وحدة الأثاث من النوع الاول لتشغيل الماكينه ٩ لمدة ساعه واحده والماكينه ب لمدة ساعتين . ويلزم لانتاج وحدة الاثاث من النوع الثانى تشغيل الماكينه ٩ لمدة ساعتين والماكينه ب لمدة ساعه واحده ، فإذا علم أن المصنع لا يعمل أكثر من ١٢ ساعه يومياً وأن ربح وحدة الاثاث من النوع الاول ٥٠ جنيهاً ومن النوع الثانى ٩٠ جنيهاً ، فما هو العدد المطلوب إنتاجه من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ؟


أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

# ثانياً

# حساب المثلثات

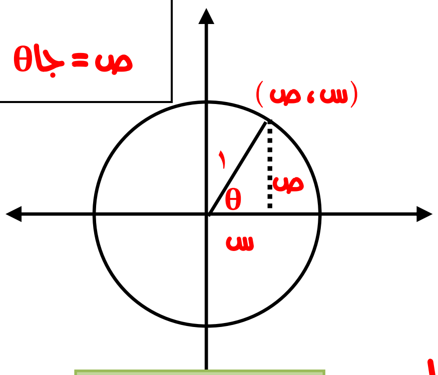
# الصف الأول الثانوى

# الفصل الدراسى الثانى

# المتطابقات المثلثية

**المتطابقات المثلثية : تذكر أن**

| |
|---|
| س = جتا θ |
| ص = جا θ |




**دائرة الوحدة**

١) جا θ = $\frac{1}{\text{قتا}\ \theta}$ ، قتا θ = $\frac{1}{\text{جا}\ \theta}$ ، جا θ × قتا θ = ١

٢) جتا θ = $\frac{1}{\text{قا}\ \theta}$ ، قا θ = $\frac{1}{\text{جتا}\ \theta}$ ، جتا θ قا θ = ١

٣) ظا θ = $\frac{1}{\text{ظتا}\ \theta}$ ، ظتا θ = $\frac{1}{\text{ظا}\ \theta}$ ، ظا θ ظتا θ = ١

٤) ظا θ = $\frac{\text{جا}\ \theta}{\text{جتا}\ \theta}$ ، ظتا θ = $\frac{\text{جتا}\ \theta}{\text{جا}\ \theta}$ ، ظا θ ظتا θ = ١

---

٥) جا (٩٠° − θ) = جتا θ ، جتا (٩٠° + θ) = − جا θ ، جتا (٢٧٠° − θ) = − جتا θ

٦) جا (٢٧٠° − θ) = − جتا θ ، ظا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ ، جا (٢٧٠° + θ) = − جتا θ

٧) جا (١٨٠° − θ) = جا θ ، جا (٣٦٠° − θ) = − جا θ ، جتا (١٨٠° + θ) = − جتا θ

٨) جا (− θ) = − جتا θ ، جتا (− θ) = جا θ ، ظا (− θ) = − ظتا θ

---

٩) من دائرة الوحدة س$^2$ + ص$^2$ = ١ ∴ جا$^2$θ + جتا$^2$θ = ١ (تسمى متطابقة فيثاغورث)

١٠) ١ + ظا$^2$θ = قا$^2$θ ، ١ + ظتا$^2$θ = قتا$^2$θ

---

**تبسيط المقادير المثلثية :** المقصود بتبسيط المقادير المثلثية هو وضعها فى أبسط صورة وذلك باستخدام المتطابقات المثلثية الأساسية وطرق التحليل والأختصار والإبدال وغيرها من الخواص

---

**مثال١** أكتب فى أبسط صورة : (جا θ + جتا θ)$^2$ − ٢ جا θ جتا θ **الحــــــــل**

المقدار = (جا θ + جتا θ)$^2$ − ٢ جا θ جتا θ = جا$^2$θ + جتا$^2$θ + ~~٢ جا θ جتا θ~~ − ~~٢ جا θ جتا θ~~

= جا$^2$θ + جتا$^2$θ = ١

**مثال٢** أوجد قيمة جا θ جتا θ ظا θ — الحـــل

المقدار = جا θ جتا θ ظا θ = جا θ جتا θ $\times \frac{\text{جا }\theta}{\text{جتا }\theta}$ = جا$^2$ θ

---

**مثال٣** أوجد قيمة $\frac{\text{ظا }\theta \text{ ظتا }\theta}{\text{قا }\theta}$ — الحـــل

المقدار = $\frac{\text{ظا }\theta \text{ ظتا }\theta}{\text{قا }\theta}$ = $\frac{1}{\text{قا }\theta}$ = جتا θ

---

**مثال٤** أوجد قيمة $\frac{1 - \text{جا}^2\theta}{1 - \text{جتا}^2\theta}$ — الحـــل

المقدار = $\frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$ = ظتا$^2$ θ

---

**مثال٥** أوجد قيمة جا (٩٠° − θ) قتا (٩٠° − θ) — الحـــل

المقدار = جا (٩٠° − θ) قتا (٩٠° − θ) = جتا θ قا θ = ١

---

**مثال٦** إذا كان قا$^2$ θ = ٣ فإن : ظا$^2$ θ = ...........

∵ ١ + ظا$^2$ θ = قا$^2$ θ ∴ ١ + ظا$^2$ θ = ٣ ∴ ظا$^2$ θ = ٢

---

**مثال٧** إذا كان قا θ = ٢ فإن : ظا$^2$ θ = ........... — الحـــل

∵ ١ + ظا$^2$ θ = قا$^2$ θ ∴ ١ + ظا$^2$ θ = ٤ ∴ ظا$^2$ θ = ٣

---

**مثال٨** ابسط صوره للمقدار ٥ + ٥ ظا$^2$ θ = ؟؟؟؟ — الحـــل ٥ (١ + ظا$^2$ θ) = ٥ × ١ = ٥

---

**مثال٩** اثبت أن : جا θ جا (٩٠° − θ) ظا θ = ١ − جتا$^2$ θ — الحـــل

الطرف الايمن = جا θ جا (٩٠° − θ) ظا θ = جا θ جتا θ $\times \frac{\text{جا }\theta}{\text{جتا }\theta}$ = جا$^2$ θ = ١ − جتا$^2$ θ

**مثال ١٠** أثبت صحة المتطابقة : $جا^2 θ - جتا^2 θ = ٢جا^2 θ - ١$ **الحــــــل**

**الطرف الأيمن** $= جا^2 θ - جتا^2 θ = جا^2 θ - (١ - جا^2 θ)$

$= جا θ - ١ + جا^2 θ = ٢جا^2 θ - ١ =$ الطرف الأيسر

---

**مثال ١١** اثبت أن $ظا θ + ظتا θ = قا θ \; قتا θ$ **الحــــــل**

**الطرف الأيمن** $= ظا θ + ظتا θ = \frac{جا θ}{جتا θ} + \frac{جتا θ}{جا θ} = \frac{جا^2 θ + جتا^2 θ}{جتا θ \; جا θ}$

$= \frac{١}{جتا θ \; جا θ} = \frac{١}{جتا θ} \times \frac{١}{جا θ} = قا θ \; قتا θ =$ الطرف الأيسر

---

**مثال ١٢** أثبت صحة المتطابقة : $\frac{جا^2 θ}{١ - جتا θ} = ١ + جتا θ$ **الحــــــل**

**الطرف الأيمن** $= \frac{جا^2 θ}{١ - جتا θ} = \frac{١ - جتا^2 θ}{١ - جتا θ} = \frac{(١ - جتا θ)(١ + جتا θ)}{١ - جتا θ}$

$= ١ + جتا θ =$ الطرف الأيسر

---

**تدريب** أثبت صحة المتطابقة : $\frac{جتا^2 θ}{١ + جا θ} = ١ - جا θ$ **الحــــــل**





أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**مثال ١٣** أثبت أن $\frac{\text{ظتا ج}}{١ + \text{ظتا}^٢ \text{ج}} = \text{جا ج} \times \text{جتا ج}$ **الحــــل**

**الطرف الأيمن =** $\frac{\text{ظتا ج}}{١ + \text{ظتا}^٢ \text{ج}} = \frac{\text{ظتا ج}}{\text{قتا}^٢ \text{ج}} = \text{ظتا ج} \div \text{قتا}^٢ \text{ج} = \frac{\text{جتا ج}}{\text{جا ج}} \div \frac{١}{\text{جا}^٢ \text{ج}}$

$= \frac{\text{جتا ج}}{\text{جا ج}} \times \text{جا}^٢ \text{ج} = \text{جتا ج جا ج}$

---

**مثال ١٤** أثبت صحة المتطابقة : $\frac{١ - \text{ظا}^٢ \theta}{١ + \text{ظا}^٢ \theta} = ٢ \text{جا}^٢ \theta - ١$ **الحــــل**

**الطرف الأيمن =** $\frac{١ - \text{ظتا}^٢ \theta}{١ + \text{ظتا}^٢ \theta} = \frac{١ - \text{ظتا}^٢ \theta}{\text{قتا}^٢ \theta} = (١ - \text{ظتا}^٢ \theta) \div \text{قتا}^٢ \theta$

$= (١ - \frac{\text{جتا}^٢ \theta}{\text{جا}^٢ \theta}) \div \frac{١}{\text{جا}^٢ \theta}$

$= (١ - \frac{\text{جتا}^٢ \theta}{\text{جا}^٢ \theta}) \times \text{جا}^٢ \theta$

$= \text{جا}^٢ \theta - \text{جتا}^٢ \theta = \text{جا}^٢ \theta - (١ - \text{جا}^٢ \theta)$

$= \text{جا}^٢ \theta - ١ + \text{جا}^٢ \theta = ٢ \text{جا}^٢ \theta - ١$

---

**مثال ١٥** أثبت صحة المتطابقة : $(١ - \text{جا} \theta)(\text{قا} \theta + \text{ظا} \theta) = \text{جتا} \theta$ **الحــــل**

**الطرف الأيمن =** $(١ - \text{جا} \theta)(\text{قا} \theta + \text{ظا} \theta) = (١ - \text{جا} \theta)(\frac{١}{\text{جتا} \theta} + \frac{\text{جا} \theta}{\text{جتا} \theta})$

$= (١ - \text{جا} \theta)(\frac{١ + \text{جا} \theta}{\text{جتا} \theta})$

$= (\frac{١ - \text{جا}^٢ \theta}{\text{جتا} \theta}) = \frac{\text{جتا}^٢ \theta}{\text{جتا} \theta} = \text{جتا} \theta$



أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**مثال ١٦** أثبت صحة المتطابقة : $ظا^2 θ + ظتا^2 θ - (قا^2 θ + قتا^2 θ) = -2$ **الحل**

**الطرف الأيمن** = $ظا^2 θ + ظتا^2 θ - (قا^2 θ + قتا^2 θ) = ظا^2 θ + ظتا^2 θ - قا^2 θ - قتا^2 θ$

$= (ظا^2 θ - قا^2 θ) + (ظتا^2 θ - قتا^2 θ)$

$= (-1) + (-1) = -2$

---

**مثال ١٧** أكتب فى أبسط صورة : $\frac{1}{جا^2 θ} - \frac{1}{جتا^2 θ}$ **الحل**

**المقدار** = $\frac{1}{جا^2 θ} - \frac{1}{ظا^2 θ} = قتا^2 θ - ظتا^2 θ = 1 + ظتا^2 θ - ظتا^2 θ = 1$

---

**مثال ١٨** أكتب فى أبسط صورة : $\frac{1 - جا^2 θ}{جتا^2 θ - 1}$ **الحل**

$\frac{1 - جا^2 θ}{جتا^2 θ - 1} = \frac{جتا^2 θ}{1 - جا^2 θ - 1} = \frac{جتا^2 θ}{- جا^2 θ} = - ظتا^2 θ$

---

**تدريب ٢** أكتب فى أبسط صورة جا θ قتا θ - جتا^2 θ **الحل**

---

**تدريب ٣** إذا كان $قا^2 θ = 5$ فإن : $ظا^2 θ = ..........$

تدريب٤ القيمه العدديه للمقدار ٥ جتا θ × ٣ قا θ = ..............

تدريب٥ أثبت صحة المتطابقة : جا$^{٤}$θ – جتا$^{٤}$θ = ٢ جتا$^{٢}$θ – ١

تدريب٥ أثبت صحة المتطابقة : ظتا$^{٢}$θ – جتا$^{٢}$θ = ظتا$^{٢}$θ جتا$^{٢}$θ

تدريب٦ إذا كان ظا θ = ٢ فإن : قا$^{٢}$θ = ...........

تدريب٧ القيمه العدديه للمقدار ٩ ( جا$^{٢}$θ + جتا$^{٢}$θ )$^{٣}$ =

# حل المعادلات المثلثية

**مثال أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان $\sqrt{٢}$ جاθ − ١ = ٠ الحـــــل**

$\sqrt{٢}$ جاθ = ١ ∴ جاθ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ موجبه (أول ، ثانى)

الزاويه التى جيبها $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ٤٥

الربع الأول θ = ٤٥ الحـــل العام هو ٤٥ + ٢πن

، الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥ الحـــل العام هو ١٣٥ + ٢πن

م.ح = {٤٥ ، ١٣٥}

---

**مثال أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان ٢ جتاθ − $\sqrt{٣}$ = ٠ الحـــــل**

٢ جتاθ = $\sqrt{٣}$ ∴ جتاθ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ موجبه (أول ، رابع)

الزاويه التى جيب تمامها $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٣٠

الربع الأول θ = ٣٠ الحـــل العام هو ٣٠ + ٢πن

، الربع الرابع θ = ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠ الحـــل العام هو ٣٣٠ + ٢πن

م.ح = {٣٠ ، ٣٣٠}

---

**مثال٢ أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان قتاθ − ٢ = ٠ الحـــــل**

قتاθ = ٢ ∴ جاθ = $\frac{١}{٢}$ موجبه (أول ، ثانى)

الزاويه التى جيبها $\frac{١}{٢}$ هى ٣٠

الربع الأول θ = ٣٠ الحـــل العام هو ٣٠ + ٢πن

، الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠ الحـــل العام هو ١٥٠ + ٢πن

تدريب ١ أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان ٢ جتا θ – ١ = ٠ الحـــــل

---

مثال ٣ أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان ٣ ظا θ – ١ = ٠ الحـــــل

$\sqrt{3}$ ظا θ = ١ ∴ ظا θ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ موجبه ( أول ، ثالث )

الزاويه التى ظلها $\frac{1}{\sqrt{3}}$ هى ٣٠

الربع الأول θ = ٣٠ الحـــل العام هو ٣٠ + π ن

، الربع الثالث θ = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠ الحـــل العام هو ٢١٠ + π ن

م . ح = { ٣٠ ، ٢١٠ }

---

مثال ٤ أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان ظا θ + ١ = ٠ الحـــــل

ظا θ = –١ ∴ ظا θ = –١ سالبه ( ثانى ورابع )

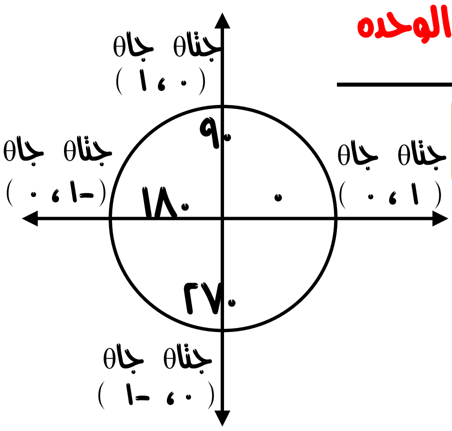
الزاويه التى ظلها ١ هى ٤٥

الربع الثانى θ = ١٨٠ – ٤٥ = ١٣٥ الحـــل العام هو ١٣٥ + π ن

، الربع الرابع θ = ٣٦٠ – ٤٥ = ٣١٥ الحـــل العام هو ٣١٥ + π ن

م . ح = { ١٣٥ ، ٣١٥ }

ملحوظه : إذا كانت ( جا θ ، جتا θ ) = ١ أو -١ أو ٠ نستخدم دائرة الوحده




**مثال أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان جا θ -١ = ٠**

## الحـــــل

∴ جا θ = ١ من دائرة الوحده

θ = ٩٠ الحـــل العام هو ٩٠+ ٢ π ن

---

**مثال أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان جتا θ = ٠** الحـــــل

جتا θ = ٠ من دائرة الوحده

θ = ٩٠ الحـــل العام هو ٩٠+ ٢ π ن

θ = ٢٧٠ الحـــل العام هو ٢٧٠+ ٢ π ن

---

**مثال أوجد الحل العام إذا كان ٢ جا θ جتا θ - $\sqrt{٣}$ جا θ = ٠** الحـــــل

جا θ ( ٢جتا θ - $\sqrt{٣}$ ) = ٠

إما جا θ =٠ أو ٢جتا θ - $\sqrt{٣}$ =٠

من دائرة الوحده ٢جتا θ = $\sqrt{٣}$

إما θ =٠ الحـــل العام هو ٢ π ن جتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ موجبه ( أول ورابع )

أو θ =١٨٠ الحـــل العام هو ١٨٠ + ٢ π ن الربع الأول θ = ٣٠ الحـــل العام هو ٣٠ + ٢ π ن

، الربع الرابع θ = ٣٦٠ - ٣٠ = ٣٣٠

الحـــل العام هو ٣٠ + ٢ π ن

**مثال ٦ أوجد الحل العام إذا كان جا θ جتا θ − $\frac{١}{٢}$ جتا θ = ٠ الحـــــل**

المقدار = جا θ جتا θ − $\frac{١}{٢}$ جتا θ = جتا θ ( جا θ − $\frac{١}{٢}$ ) = ٠

إما جتا θ = ٠ أو جا θ − $\frac{١}{٢}$ = ٠

من دائرة الوحده

θ = ٩٠ الحـــل العام هو ٩٠ + ٢ π ن

θ = ٢٧٠ الحـــل العام هو ٢٧٠ + ٢ π ن

جا θ = $\frac{١}{٢}$ موجبه ( أول وثانى )

الزاويه التى جيبها $\frac{١}{٢}$ هى ٣٠

الربع الأول θ = ٣٠ الحـــل العام هو ٣٠ + ٢ π ن

، الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠

الحـــل العام هو ١٥٠ + ٢ π ن

---

**مثال ٧ أوجد الحل العام إذا كان ٢ جا$^{٢}$ θ = $\sqrt{٢}$ جا θ**

٢ جا$^{٢}$ θ − $\sqrt{٢}$ جا θ = ٠

جا θ ( ٢ جا θ − $\sqrt{٢}$ ) = ٠

إما جا θ = ٠ أو ٢ جا θ − $\sqrt{٢}$ = ٠

من دائرة الوحده

إما θ = ٠ الحـــل العام هو ٢ π ن

أو θ = ١٨٠ الحـــل العام هو ١٨٠ + ٢ π ن

جا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ موجبه ( أول وثانى )

الزاويه التى جيبها $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ هى ٤٥

الربع الأول θ = ٤٥ الحـــل العام هو ٤٥ + ٢ π ن

، الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥

الحـــل العام هو ١٣٥ + ٢ π ن

**مثال٢ أوجد مجموعة حل المعادلة ٤ جتا$^2$θ – ٣ = ٠ الحـــل**

٤ جتا$^2$θ = ٣ جتا$^2$θ = $\frac{٣}{٤}$ جتاθ = ± $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

إما جتاθ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (أول ورابع) أو جتاθ = – $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ثانى وثالث)

الزاويه التى جيب تمامها $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٣٠

الربع الاول θ = ٣٠

الربع الرابع θ = ٣٦٠ – ٣٠ = ٣٣٠

الربع الثانى θ = ١٨٠ – ٣٠ = ١٥٠

الربع الثالث θ = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠

∴ م.ح = { ٣٠ ، ٣٠٠ ، ١٥٠ ، ٢١٠ }

---

**مثال٣ أوجد مجموعة حل المعادلة ٢ جاθ جتاθ + ٣ جتاθ = ٠ الحـــل**

جتاθ ( ٢ جاθ + ٣ ) = ٠

إما جتاθ = ٠

من دائرة الوحده

θ = ٩٠ أو ٢٧٠

∴ مجموعة الحل = {٩٠ ، ٢٧٠}

أو ٢ جاθ + ٣ = ٠

جاθ = $\frac{-٣}{٢}$ مرفوض

---

**مثال٤ أوجد مجموعة حل المعادلة ٣ قتاθ + ٢ = ٠ ، θ ∈ [٠ ، ٢π] الحـــل**

٣ قتاθ + ٢ = ٠ ∴ ٣ قتاθ = – ٢

∴ قتاθ = $\frac{-٢}{٣}$

∴ جاθ = $\frac{-٣}{٢}$ = – ١.٥ مرفوض ∴ مجموعة الحل = ∅

**مثال أوجد مجموعة حل المعادلة قا θ + $\sqrt{2}$ = ٠ ، θ ∈ ]٠ ، ٢$\pi$[ الحـــل**

قا θ = − $\sqrt{2}$ ∴ جتا θ = − $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ثانى وثالث)

الزاويه التى جيب تمامها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هى ٤٥

الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥

الربع الثالث θ = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥ ∴ مجموعة الحل = {١٣٥ ، ٢٢٥}

---

**مثال٦ أوجد مجموعة الحل إذا كان ٢جا² θ + جا θ − ١ = ٠ الحـــــــــل**

(جا θ + ١) (٢جا θ − ١) = ٠

جا θ + ١

٢جا θ − ١

إما جا θ + ١ = ٠ أو ٢جا θ − ١ = ٠

جا θ = −١ | جا θ = $\frac{1}{2}$ موجبه (أول والثانى)

من دائرة الوحده | الربع الأول θ = ٣٠

θ = ٢٧٠ | الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠

---

**مثال٧ أوجد الحل العام إذا كان جا θ = جتا θ الحـــــل**

جا θ = جتا θ بالقسمة على جتا θ للطرفين

$\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta} = \frac{\text{جتا } \theta}{\text{جتا } \theta}$

ظا θ = ١ موجبه (أول وثالث) الزاويه التى ظلها ١ هى ٤٥ أكمل

---

تدريب٢ أوجد الحل العام إذا كان جتا θ − $\sqrt{3}$ جا θ = ٠

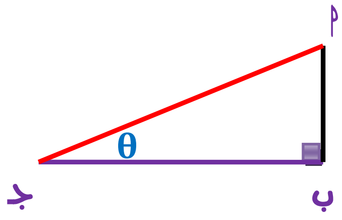
تدريب٣ أوجد الحل العام إذا كان ٢جا θ − $\sqrt{3}$ = ٠

تدريب٣ أوجد الحل العام إذا كان ٢جا θ جتا θ − $\sqrt{3}$ جا θ = ٠

# حل المثلث القائم الزاوية

**حل المثلث القائم الزاوية** : يعنى ايجاد اطوال اضلاعه الثلاثة وقياسات زواية الثلاثة

**تذكر أن :**




ا جـ = $\sqrt{(\text{ا ب})^2 + (\text{ب جـ})^2}$

، ب جـ = $\sqrt{(\text{ا ب})^2 + (\text{ب جـ})^2}$

، جا θ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$

، جتا θ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ا جـ}}$ ، ظا θ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب جـ}}$

---

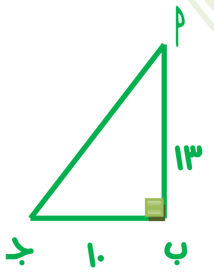
## أولاً حل المثلث إذا علم منه طولا ضلعين وزاوية :

فيكون المطلوب هو ايجاد الضلع الثالث وقياس الزاويتان الأخريان

---

**مثال١ حل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ا ب = ١٣سم ، ب جـ = ١٠ سم**

**الحـــــــل** ( ضلعان وزاويه ) المطلوب ( زاويتان وضلع )




ا جـ = $\sqrt{(١٣)^2 + (١٠)^2}$ = ١٦.٤ سم

ظا جـ = $\frac{١٣}{١٠}$ ∴ ق ( د جـ ) = $52^\circ\ 25'\ 53''$

ظا ا = $\frac{١٠}{١٣}$ ∴ ق ( د ا ) = $37^\circ\ 34'\ 6''$

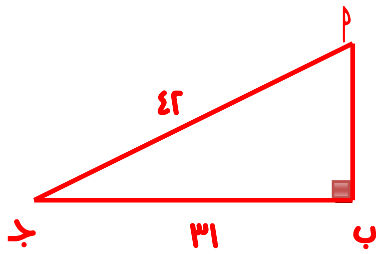
---

**تدريب١ حل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ا ب = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم الحـــــــل**

مثال حل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ا ب = ١٣سم ، ب جـ = ١٠ سم

الحـــــــل ( ضلعان وزاويه ) المطلوب ( زاويتان وضلع )

ا ب = $\sqrt{(٤٢)^٢ - (٣١)^٢}$ = ٢٨ سم




جتا جـ = $\frac{٣١}{٤٢}$ ∴ ق ( ∠ جـ ) = ٤٢° ٢٥'

جا ا = $\frac{٣١}{٤٢}$ ∴ ق ( ∠ا ) = ٤٧° ٣٤'

---

**ثانياً حل المثلث إذا علم منه قياس زاويتان و ضلع :**

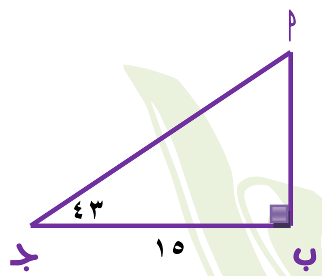
فيكون المطلوب هو ايجاد الزاوية الثالثة وطولا الضلعين الأخريان

---

مثال٢ حل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ق ( ∠ جـ ) = ٤٣°

، ب جـ = ١٥سم الحـــــــل (زاويتان و ضلع) المطلوب (ضلعان و زاوية)

ق ( ∠ا ) = ١٨٠ − ( ٩٠ + ٤٣ ) = ٤٧°



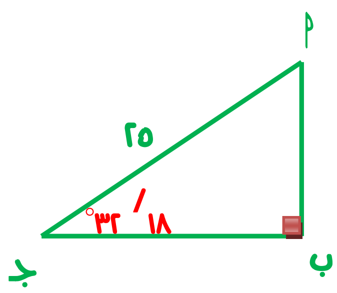

، ظا ٤٣ = $\frac{ا ب}{١٥}$ ∴ ا ب = ١٥ × ظا ٤٣ = ١٣.٩٩سم

، جتا ٤٣ = $\frac{١٥}{ا جـ}$ ∴ ا جـ = $\frac{١٥}{جتا ٤٣}$ = ٢٠.٥سم

---

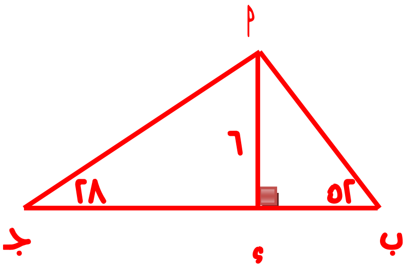
تدريب٢ حل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ق ( ∠ جـ ) = ١٨' ٣٢° ، ا جـ = ٢٥سم

الحـــــــل (زاويتان و ضلع) المطلوب (ضلعان و زاوية)



مثال ٣ أ ب جـ مثلث رسم $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ ، أ ء = ٦سم ، ق (∠ ب) = ٥٢° ، ق (∠ جـ) = ٢٨° أوجد طول $\overline{ب جـ}$ لأقرب سنتيمتر

الحـــــــــــل




فى المثلث أ ب ء

ظا ٥٢ = $\frac{٦}{ب ء}$ ∴ ب ء = $\frac{٦}{ظا ٥٢}$ = ٤.٦٩ سم

فى المثلث أ جـ ء

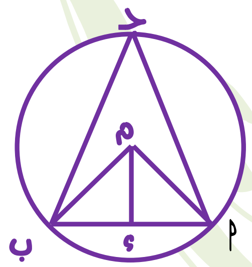
ظا ٢٨ = $\frac{٦}{ء جـ}$ ∴ ء جـ = $\frac{٦}{ظا ٢٨}$ = ١١.٢٨ سم

∴ ب جـ = ٤.٦٩ + ١١.٢٨ = ١٥.٩٧ ≈ ١٦سم

---

للمتفوقين دائرة م طول نصف قطرها ٨سم ، رسم فيها وتر يقابل زاوية محيطيه قياسها ٥٦° أوجد طول هذا الوتر

الحـــــــــــل




ق (∠ أ م ب) = ٢ ق (∠ أ جـ ب) محيطيه ومركزية مشتركان فى نفس القوس

= ٢ × ٥٦ = ١١٢°

نرسم $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$ ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، م ء ينصف ∠ أ م ب

∴ ق (∠ أ م ء) = $\frac{١١٢}{٢}$ = ٥٦

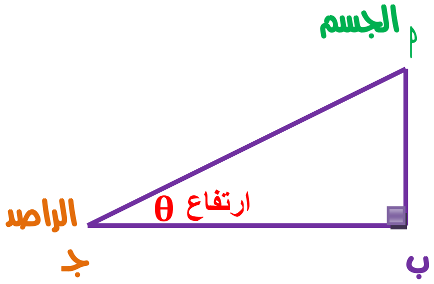
فى المثلث أ م ء جا (∠ أ م ء) = $\frac{مقابل}{وتر}$ = $\frac{أ ء}{أ م}$

جا ٥٦ = $\frac{أ ء}{٨}$ ∴ أ ء = ٨ × جا ٥٦ = ٦.٦٣سم

∴ طول الوتر أ ب = ٢ × ٦.٦٣ = ١٣.٢٦سم

# زوايا الأرتفاع والإنخفاض

## زاوية الإرتفاع :



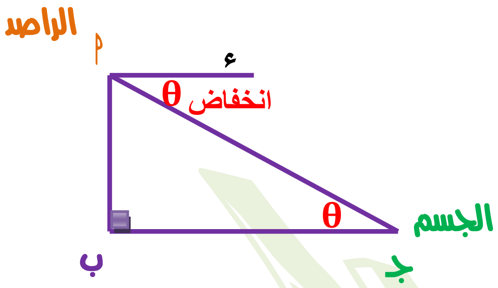

بفرض أن الراصد يقف عند النقطه جـ

والجسم المرصود عند نقطة م

فإن زاوية إرتفاع الجسم هى θ

---

## زاوية الإنخفاض :




بفرض أن الراصد يقف عند النقطه م

والجسم المرصود عند نقطة جـ

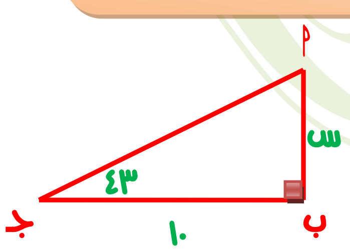
فإن زاوية إنخفاض المبنى هى θ

ويلاحظ أن ق ( ∠ ء م جـ ) = ق ( ∠ م جـ ب ) بالتبادل

---

**مثال١** من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠ متر من قاعدة سارية علم رصد شخص قمة السارية فوجدها ٤٣° أوجد ارتفاع سارية العلم لأقرب متر **الحـــــــــل**

من الشكل المقابل



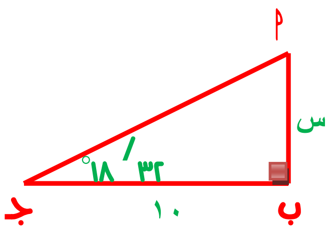

ظا ٤٣° = $\frac{\text{س}}{10}$     س = ١٠× ظا ٤٣°

س = ٩.٣ ≈ ٩متر     ارتفاع سارية العلم = ٩متر

---

**مثال٢** من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ متر من قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية إرتفاع المنزل هى ٣٢َ ١٨°

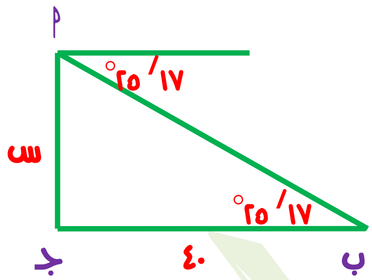
أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر **الحـــــــــل**




ظا ٣٢َ ١٨° = $\frac{\text{س}}{50}$     ∴ س = ٥٠ × ظا ٣٢َ ١٨° = ١٦.٧٦٢ ≈

تدريب ١ من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ متر من قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية إرتفاع المنزل هى ٢٦ ⁄ ٣٨° أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر الحـــــــــل

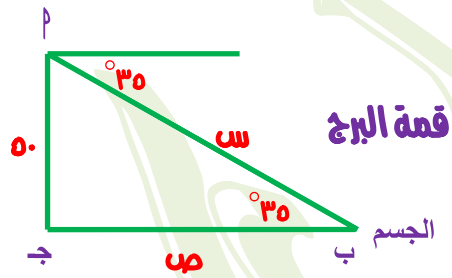
---




مثال ٢ من أعلى نقطة من مبنى منزل رصد شخص سيارة تقف على الأرض فوجد أن قياس زاوية إنخفاضها ١٧ ⁄ ٢٥° فإذا كان بعد السيارة عن قاعدة المنزل ٤٠متر أوجد ارتفاع المنزل الحــــــل

ظا ١٧ ⁄ ٢٥° = $\frac{س}{٤٠}$ ∴ س = ٤٠ × ظا ١٧ ⁄ ٢٥° = ١٨.٨٩ متر

---




مثال ٣ من قمة برج ارتفاعه ٥٠متر وجد أن قياس زاوية إنخفاض جسم فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج هى ٣٥° أوجد بعد الجسم من قمة البرج ثم أوجد بعد الجسم من قاعدة البرج الحــــــل

جا ٣٥ = $\frac{٥٠}{س}$ ∴ س = $\frac{٥٠}{جا ٣٥}$ = ٨٧.١٧ متر بعد الجسم من قمة البرج

ظا ٣٥ = $\frac{٥٠}{ص}$ ∴ ص = $\frac{٥٠}{ظا ٣٥}$ = ٧١.٤ متر بعد الجسم من قاعدة البرج

---

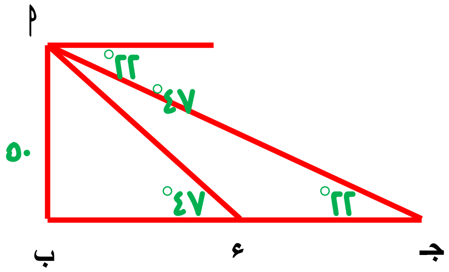
تدريب ٢ رصد شخص على صخره ارتفاعها ١٠٠ متر سياره واقفه على الطريق فكان قياس زاوية انخفاضها ٢٥° أوجد لاقرب متر بعد الراصد عن السياره الحـــــــل





أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٥ من قمة منزل إرتفاعه ٥٠ مترا لاحظ شخص سيارتين على شعاع واحد من قاعدة المنزل وجد أن قياسى زاويتى إنخفاضيهما ٢٢° ، ٤٧° أوجد البعد بين السيارتين لأقرب متر




الحـــــــل

فى Δ م جـ ب ظا ٢٢° = $\frac{٥٠}{جـ ب}$

∴ جـ ب = $\frac{٥٠}{ظا ٢٢}$ = ١٢٣.٨ متر

فى Δ م ء ب ظا ٤٧° = $\frac{٥٠}{ب ء}$

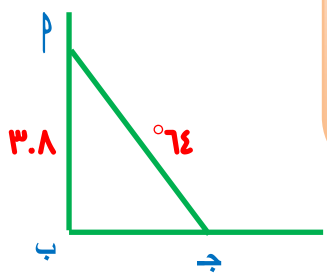
∴ ب ء = $\frac{٥٠}{ظا ٤٧}$ = ٤٦.٦ متر ∴ جـ ء = ١٢٣.٨ − ٤٦.٦ = ٧٧.٢ متر

---

تدريب ٣ من قمة صخره ارتفاعها ١٣٠ متر ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخره فوجد أن قياس زاويتى إنخفاضهما هو ٢٨° ، ٥١° أوجد البعد بين السفينتين الحـــــل

---

مثال٦ سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى ، يرتفع عن سطح الأرض ٣.٨ متر والطرف السفلى على الأرض وقياس زاوية ميل السلم عن الأرض ٦٤° أوجد لأقرب رقمين عشريين ١) بعد الطرف السفلى عن الحائط ٢) طول السلم



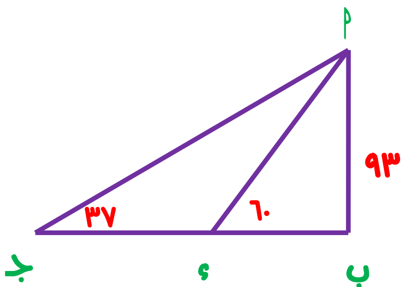

الحـــــل ظا ٦٤° = $\frac{٣.٨}{ب جـ}$ ∴ ب جـ = $\frac{٣.٨}{ظا ٦٤}$ = ١.٨٥ متر

جا ٦٤° = $\frac{٣.٨}{م جـ}$ ∴ م جـ = $\frac{٣.٨}{جا ٦٤}$ = ٤.٢٣ متر

مثال ٤ من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٣٧° وطا سار الراصد مسافة ما فى المستوى الأفقى نحو قاعدة البرج وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٦٠°

فإذا كان ارتفاع البرج ٩٣ متر أوجد المسافه الافقيهالتى سارها الراصد لأقرب متر

## الحـــــــــل




فى $\Delta$ أ ب جـ

ظا ٣٧° = $\frac{٩٣}{\text{ب جـ}}$ $\therefore$ ب جـ = $\frac{٩٣}{\text{ظا ٣٧}}$ = ١٢٣.٤ متر

فى $\Delta$ أ ب ء

ظا ٦٠° = $\frac{٩٣}{\text{ب ء}}$ $\therefore$ ب ء = $\frac{٩٣}{\text{ظا ٦٠}}$ = ٥٣.٧

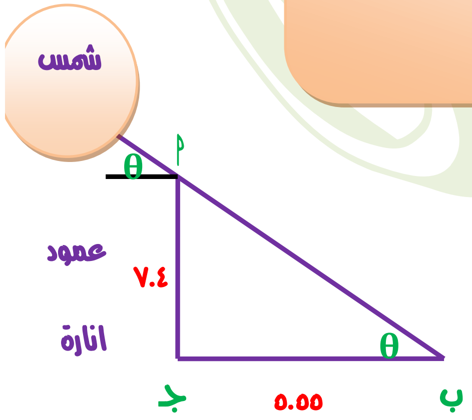
$\therefore$ جـ ء = ١٢٣ − ٥٣.٧ = ٦٩.٧ متر

---

مثال ٣ عمود انارة ارتفاعه ٧.٤ متر يلقى ظلاً على الارض طوله ٥.٥٥ متراً

أوجد بالردیان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ .

## الحــــــل




θ هى زاوية ميل الشمس

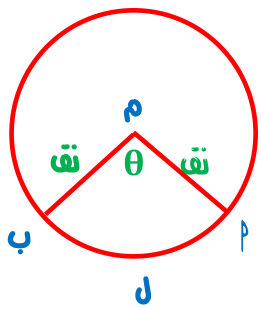
ظاθ = $\frac{٧.٤}{٥.٥٥}$ θ = ٤٨ʺ ٧ʹ ٥٣°

$\therefore$ θ بالردیان = ٤٨ʺ ٧ʹ ٥٣° $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٠.٩٢٧ ء

# القطاع الدائرى

**القطاع الدائرى :** هو جزء من سطح دائره محدد بقوس وبنصف قطرين هما طرف هذا القوس

**قوانين القطاع الدائرى :**




مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق$^{2}$    إذا كانت الزاويه المعطاه بالتقدير الدائرى

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق    إذا كان المعطى طول القوس

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س^{\circ}}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة    إذا كانت الزاويه المعطاه بالتقدير الستينى

محيط القطاع = ل + ٢نق

---

**ملحوظه**    مساحة الدائرة = $\pi$ نق$^{2}$    محيط الدائرة = ٢ $\pi$ نق

---

**مثال**   أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٧ سم وزاويته المركزيه ٢.١$^{ء}$

**الحـــــــل**

| | |
|---|---|
| م القطاع = $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق$^{2}$ | م = ؟ |
| | نق = ٧ سم |
| = $\frac{1}{2}$ × ٢.١ × (٧)$^{2}$ = ٥١.٤ سم$^{2}$ | $\theta^{ء}$ = ٢.١$^{ء}$ |

---

**تدريب**   أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٨سم وزاويته المركزيه ١.٤$^{ء}$

**الحـــــــل**

**مثال٢ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٦.٥ سم وطول قوسه ٨سم ثم أوجد محيطه**

الحـــــل

م = ؟

نق = ٦.٥ سم

ل = ٨سم

م القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٦.٥ = ٢٦سم$^٢$

محيط القطاع = ل + ٢نق = ٨+ ٢×٦.٥ = ٢١ سم

---

**مثال٣ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٧ سم وزاويته المركزيه ٦٠°**

الحـــــل

م = ؟

نق = ٧ سم

س = ٦٠°

م القطاع = $\frac{س°}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة

= $\frac{٦٠}{٣٦٠}$ × π نق$^٢$ = $\frac{٦٠}{٣٦٠}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)$^٢$ = = ٢٥.٧ سم$^٢$

---

**تدريب ٢ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٢١ سم وزاويته المركزيه ١٢٠°**

الحـــــل

---

**مثال ٤ أوجد محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ١٨ سم$^٢$ وطول قوسه ٦سم**

الحـــــل

المحيط = ؟

مساحة القطاع = ١٨ سم$^٢$

ل = ٦سم

مساحة القطاع الدائرى = ١٨

$\frac{١}{٢}$ ل نق = ١٨

$\frac{١}{٢}$ × ٦ × نق = ١٨

٣ نق = ١٨ نق = ٦ سم

المحيط = ل + ٢نق = ٦ + ٢×٦ = ٦+١٢ = ١٨سم

مثال٥ قطاع دائرى محيطه ٢٤سم وطول قوسه ١٠ سم أوجد مساحة سطح القطاع ومساحة الدائره التى تحوى هذا القطاع

الحـــــــــل

محيط القطاع = ٢٤ سم

ل = ١٠سم

المحيط = ٢٤

ل + ٢نق = ٢٤

١٠ + ٢نق = ٢٤

٢نق = ٢٤ − ١٠

٢نق = ١٤ ∴ نق = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧سم

مساحة سطح القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٧ = ٣٥ سم$^٢$

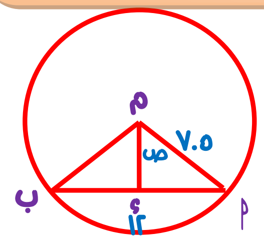
مساحة الدائره = π نق$^٢$ = $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)$^٢$ = ١٥٤ سم$^٢$

تدريب٣ قطاع دائرى محيطه ٤٠ سم وطول نصف قطر دائرته ١٥ سم أوجد مساحة سطح القطاع

الحـــــــــل

مثال٦ دائره م طول نصف قطرها ٧.٥سم ، رسم فيها نصف القطرين $\overline{م ٲ}$ ، $\overline{م ب}$ بحيث ٲ ب = ١٢سم

أوجد مساحة سطح القطاع الأصغر م ٲ ب لأقرب سم$^٢$ الحـــــــــل




من الشكل المقابل نحاول إيجاد لزاويه المركزيه ٲ م ب

فى المثلث ٲ م ء فيه ٲ ء = ٦سم

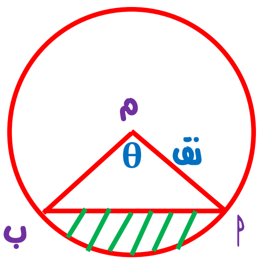
جاص = $\frac{٦}{٧.٥}$ ∴ ق (∠ ص) = ٥٣° ٧' ٤٨'' ∴ ق (∠ ٲ م ب) = ١٠٦° ١٥' ٣٦''

م القطاع = $\frac{س°}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة = $\frac{١٠٦° ١٥' ٣٦''}{٧.٥}$ × π نق$^٢$ = $\frac{١٠٦° ١٥' ٣٦''}{٧.٥}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ (٧)$^٢$ =٥٢

# القطعه الدائريه

**القطعه الدائريه :** هو جزء من سطح دائره محدد بقوس من دائره ووتراً ماراً بنهايتى ذلك القوس

**قوانين القطعه الدائريه :**




١) مساحة القطعه الدائريه = $\frac{1}{2}$ نق$^{2}$ ($\theta$ء − جا $\theta$ء)

إذا كانت الزاويه المركزيه بالتقدير الدائرى ويجب تحويل الآله للرديان

٢) مساحة القطعه الدائريه = $\frac{1}{2}$ نق$^{2}$ ( س × $\frac{\pi}{180}$ − جا س )

إذا كانت الزاويه المركزيه بالتقدير الستينى

ملاحظه : التحويل من دائرى لستينى والعكس

$$\frac{\theta^{ء}}{\pi} = \frac{س}{180}$$

---

**ملاحظه** لإيجاد مساحة القطعه الكبرى = مساحة الدائره − مساحة القطعه الصغرى

---

**مثال١** أوجد مساحة القطعه الدائريه التى طول قطرها ١٦سم وقياس زاويتها المركزيه ١٢٠°

الحــــــل

م = ؟

نق = ٨سم

س = ١٢٠°

م = $\frac{1}{2}$ نق$^{2}$ ( س × $\frac{\pi}{180}$ − جا س )

= $\frac{1}{2}$ (٨)$^{2}$ ( ١٢٠ × $\frac{\pi}{180}$ − جا١٢٠ ) = ٣٢ ( ١.٢٢٨ ) = ٣٩.٣ سم$^{2}$

---

**مثال٢** أوجد مساحة القطعه الدائريه التى طول نصف قطرها ٨سم وقياس زاويتها المركزيه ٢.٠٢ء

الحــــــل

م = ؟

نق = ٨سم

$\theta$ء = ٢.٠٢ء

م = $\frac{1}{2}$ نق$^{2}$ ($\theta$ء − جا $\theta$ء)

= $\frac{1}{2}$ (٨)$^{2}$ (٢.٠٢ء − جا ٢.٠٢ء) = ٣٢ ( ١.١٢ ) = ٣٥.٨٤ سم$^{2}$



أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**تدريب١ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ١٢سم وقياس زاويتها المركزية ١٥٠°**

## الحـــــــل

---

**مثال٢ قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وطول قوسها ٢٦.١٩ سم أوجد مساحة هذه القطعة**

## الحـــــــل

$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{٢٦.١٩}{١٠} = ٢.٦١٩$

م = $\frac{١}{٢}$ نق² ($\theta^{ء}$ − جا $\theta^{ء}$)

= $\frac{١}{٢}$ (١٠)² (٢.٦١٩ء − جا ٢.٦١٩ء) = ٥٠ (٢.١٢) = ١٠٦ سم²

ل = ١٠اسم

نق = ١٠اسم

---

**تدريب٢ قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم وطول قوسها ١٣ سم أوجد مساحة هذه القطعة**

## الحـــــــل

---

**مثال٣ أوجد مساحة قطعة دائرية إرتفاعها ٤سم وطول نصف قطر دائرتها ٧سم**

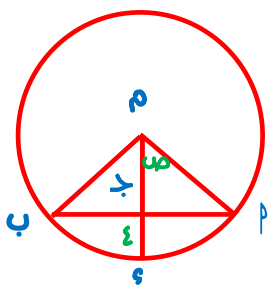
## الحـــــــل

من الشكل القابل م جـ = ٧ − ٤ = ٣ سم

، جتا (حـ ص) = $\frac{٣}{٧}$ ∴ ق (حـ ص) = ٦٤ َ ٣٧ °

∴ ق (حـ أ م ب) = ٢ × ٦٤ َ ٣٧ ° = ١٥ َ ١٢٩ °

∴ م = $\frac{١}{٢}$ نق² (س × $\frac{\pi}{١٨٠}$ − جا س) = $\frac{١}{٢}$ (٧)² (١٥ َ ١٢٩ ° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ − جا ١٥ َ ١٢٩ °) = ٢٤.٥ (١.٤٨) = ٣٦.٢٦

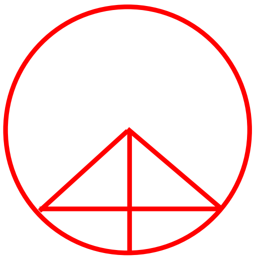





أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**تدريب ٣ أوجد مساحة قطعه دائريه إرتفاعها ٤سم وطول نصف قطر دائرتها ٨سم**

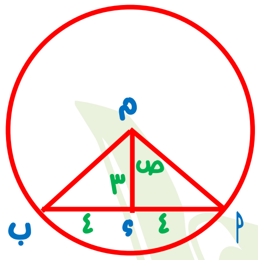
**الحـــــــــــل**



---

**مثال ٤ وتر فى دائره طوله ٨سم على بعد ٣سم من مركزها ، أوجد مساحة القطعة الدائري الصغرى الحادثه من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائره**

**الحـــــــــل**




من الشكل القابل أ ء = ٤سم

فى المثلث أ م ء

أ م = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ نق = ٥سم

، ظا (د ص) = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ق (د ص) = ٥٣° ٨َ

∴ ق (د أ م ب) = ٢ × ٥٣° ٨َ ≈ ١٠٦°

∴ م = $\frac{١}{٢}$ نق² (س × $\frac{\pi}{١٨٠}$ − جا س) = $\frac{١}{٢}$ (٥)² (١٠٦° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ − جا ١٠٦°) = ٢٤.٥ (١.٤٨) = ١١.١ سم²

---

**تدريب ٤ أ ب وتر فى دائره طوله ١٠سم يقابل زاويه مركزيه قياسها ٦٠ أوجد مساحة القطعة الكبرى التى وترها أ ب**

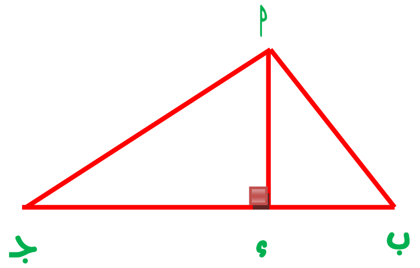
**الحـــــــــــل**


أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

# المساحات

## مساحة المثلث بمعلومية طول القاعده والارتفاع

م △ = $\frac{1}{2}$ طول القاعده فى الارتفاع



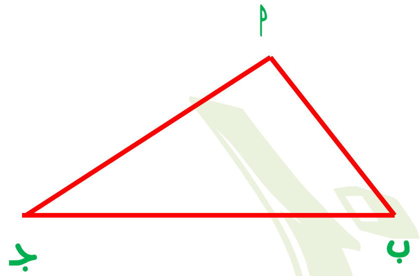

فى الشكل المقابل :

م △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ ء

---

## مساحة المثلث بمعلومية طول ضلعين والزاويه المحصوره بينهما

م △ = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب الضلعين × الزاويه المحصوره بينهما

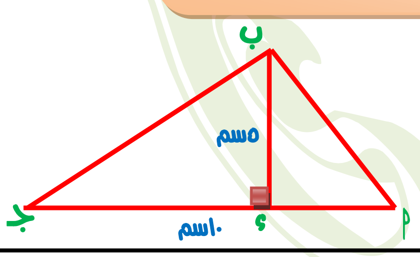



فى الشكل المقابل :

م △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ × جا أ

---

مثال١ أحسب مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه أ جـ = ١٠سم وطول العمود المرسوم من ب على أ جـ يساوى ٥سم الحـــــــــل




م △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ × ب ء

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ٥ = ٢٥سم$^2$

---

مثال٢ أحسب مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه أ ب = ٧سم ، أ جـ = ١٠سم ، ق (∠ أ) = ٥٠° لأقرب رقمين عشريين الحـــــــــل

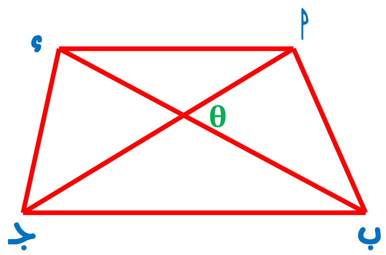
م △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ × جا أ = $\frac{1}{2}$ ٧ × ١٠ × جا ٥٠ ≈ ٢٦.٨١ سم$^2$

---

تدريبا أحسب مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه أ ب = ٤سم ، أ جـ = ١١سم ، ق (∠ أ) = ٧٨° لأقرب رقمين عشريين الحـــــــــل

## مساحة الشكل الرباعى :

### فى الشكل المقابل :




م الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين × جيب الزاويه المحصوره بينهما

م الشكل م ب جـ ء = $\frac{1}{2}$ م جـ × ب ء × جاθ

---

مثال١ أحسب مساحة الشكل الرباعى الذى فيه طولا قطريه ١٠ سم ، ١٤سم ، قياس الزاويه المحصوره بينهما ٦٥° لاقرب رقمين عشريين

الحـــــــــل

م الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين × جيب الزاويه المحصوره بينهما

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ١٤ × جا٦٥ = ٦٣.٤٤ سم٢

---

تدريب٢ أحسب مساحة الشكل الرباعى الذى فيه طولا قطريه ١٨ سم ، ١٣سم ، قياس الزاويه المحصوره بينهما ٧٤° لاقرب رقمين عشريين

الحـــــــــل

---

تذكر أن : المربع والمعين قطراهما متعامدان

م المربع = $\frac{1}{2}$ مربع طول قطر

، م المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

## مساحة المضلع المنتظم :

المضلع المنتظم هو المضلع الذى تتساوى جميع أضلاعه وجميع زاوياه

مساحة المضلع المنتظم = $\frac{1}{4}$ ن س$^2$ ظتا $\frac{\pi}{ن}$ حيث ن عدد الاضلاع ، س طول الضلع

مثال١ أوجد مساحة المضلع الخماسى الذى طول ضلعه ١٠ سم لاقرب رقمين عشريين

الحـــــــــل

مساحة المضلع المنتظم = $\frac{1}{4}$ ن س$^2$ ظتا $\frac{\pi}{ن}$

= $\frac{1}{4}$ × ٥ × (١٠)$^2$ ظتا $\frac{١٨٠}{٥}$ = ١٧٢.٠٥ سم$^2$

تدريب٢ أوجد مساحة المضلع الثمانى الذى طول ضلعه ١٦سم لاقرب رقمين عشريين

الحـــــــــل


أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

# ثالثاً
# الهندسة
# الصف الأول الثانوي
# الفصل الدراسي الثاني

# الكميات القياسية والكميات المتجهة

**الكمية القياسية : هى كمية تتعين تماماً بمعرفة مقدارها فقط   مثل ( الطول – الزمن – درجة الحرارة )**

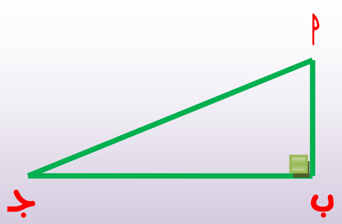
**الكمية المتجهة : هى كمية تتعين تماماً بمعرفة مقدارها واتجاهها   مثل ( الإزاحة – القوة – السرعة )**

**المسافة :** هى المسار الفعلى للجسم

**الأزاحة :** المسافة المقطوعة فى زمن معين        ( وهى أقصر بعد بين نقطتين )

---

**مثال١  فى الشكل المقابل :**




**تحرك جسم من أ إلى ب ثم غير اتجاهه الى جـ**

**أوجد المسافة والإزاحة أثناء الحركة        الحـــــــل**

المسافة = أ ب + ب جـ = ٥ + ١٣ = ١٨متر

الأزاحة = أجـ = $\sqrt{}$ ٢٥ + ١٤٤ = ١٣متر فى أتجاه أجـ (متجه)

---

**القطعة المستقيمة الموجهة : هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه .**

**فى الشكل المقابل :**

أ ——— ب        أ ——← ب

**القطعة المستقيمة** أ ب أو ب أ        **القطعة المستقيمة الموجهة** أ ب (متجه)

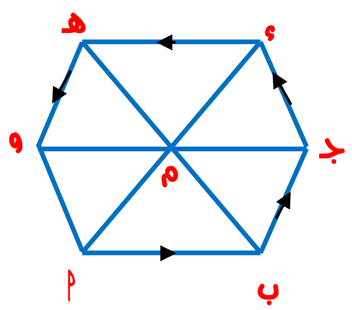
**معيار المتجه : هو طول** أ ب (متجه) **ويرمز لها بالرمز** ‖ أ ب ‖

---

**تتكافئ القطعتان المستقيمتان إذا كان :  أ ) لهما نفس الطول        ب ) لهما نفس الإتجاه**

---

**مثال٢ فى الشكل المقابل : أ ب جـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٦ سم**



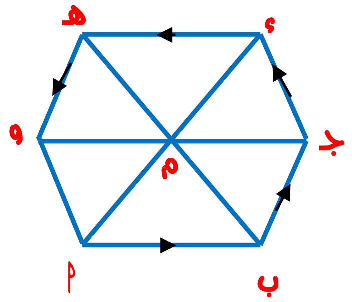

**فإذا تحرك الجسم من أ الى ب ثم جـ ثم ء ثم هـ وتوقف عند و**

**أوجد المسافة المقطوعة** ........٣٠سم........

**الإزاحة** ........٦سم........ **وفى اتجاه** ........أ و (متجه)........

١) أ ب تكافئ ....و م....، تكافئ ....م جـ....، تكافئ ....ء هـ....  ٢) ء م تكافئ ....جـ ب.... ، تكافئ ....و هـ....، تكافئ ....م أ....

مثال ٢ فى الشكل المقابل : ا ب جـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٥ سم




فإذا تحرك الجسم من ا الى ب ثم جـ ثم ء ثم هـ وتوقف عند و

أوجد المسافة المقطوعة ....................

الإزاحة .................... وفى اتجاه ....................

١) $\overrightarrow{\text{ب ا}}$ تكافئ ........ ، تكافئ .........، تكافئ ....... ٢) $\overrightarrow{\text{ء م}}$ تكافئ ......... ، تكافئ ..........، تكافئ ........

---

**مثال ٣ إذا كان $\overrightarrow{\text{ا}}$ = (٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-٣ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٥ ، -١) وكان ا ب يكافئ المتجه جـ ء**

**أوجد $\overrightarrow{\text{ء}}$**

**الحـــــــــل**

ا ب = جـ ء

ب - ا = ء - جـ

(-٣ ، ١) - (٢ ، ٣) = ء - (٥ ، -١)

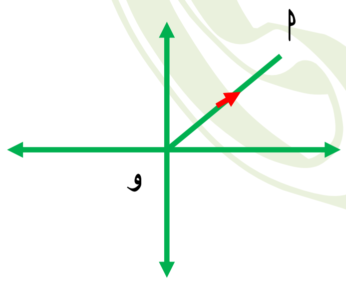
(-٥ ، -٢) = ء - (٥ ، -١)

ء = (-٥ ، -٢) + (٥ ، -١)

ء = (٠ ، -٣)

---

## المتجهات



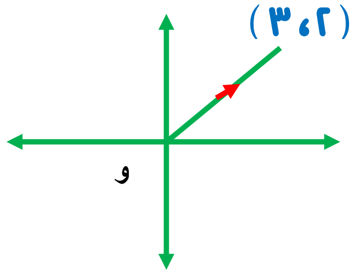

**أولاً متجه الموضع :**

لأى نظام أحداثى متعامد فإن متجه الموضع $\overrightarrow{\text{و ا}}$ هو

المتجه الذى نقطة بدايته نقطة الأصل ونهايته النقطه ا ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{ا}}$

---

**فى الشكل المقابل :**

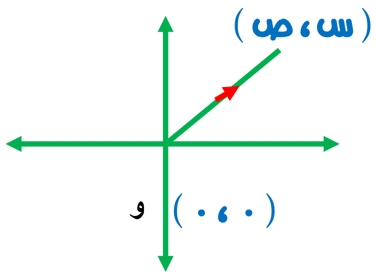



$\overrightarrow{\text{و ا}}$ = (٢ ، ٣) وتكتب $\overrightarrow{\text{ا}}$ = (٢ ، ٣)

المتجه الذى نقطة بدايته (٠ ، ٠) ونهايته (٢ ، ٣)

## لإيجاد معيار متجه الموضع

فى الشكل المقابل :




$$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(\text{س} - ٠)^{٢} + (\text{ص} - ٠)^{٢}}$$

$$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$$

---

**مثال ١** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، ١٢) أوجد $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ **الحـــل**

$$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(٥)^{٢} + (١٢)^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$$

---

**مثال ٢** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، -٤) أوجد $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ **الحـــل**

$$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(٣)^{٢} + (-٤)^{٢}} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

---

**متجه الوحدة :** هو المتجه الذى معياره يساوى الوحده

**مثال ٣** أوجد معيار المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ **الحـــل**

$$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٥}} = ١$$

---

**المتجه الصفرى :** هو المتجه الذى معياره يساوى صفر

**مثال ٤** أوجد معيار المتجه و = (٠ ، ٠) **الحـــل**

$$\|\overrightarrow{\text{و}}\| = \sqrt{٠ + ٠} = ٠$$

---

**تمرين** أوجد معيار المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٦ ، ٨)

**تمرين** أوجد معيار المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\left(\frac{-٣}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

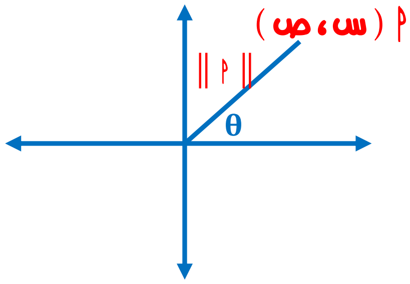
## الصور المختلفة للمتجه $\overleftarrow{أ}$

**أولاً الصورة الإحداثية للمتجه** $\overleftarrow{أ}$ : هى ( س ، ص ) مثال ← ( ٢ ، ٣ )

**ثانياً الصورة القطبية للمتجه** $\overleftarrow{أ}$ **الذى يصنع زاوية θ** : هى ( ‖ $\overleftarrow{أ}$ ‖ ، θ ) مثال ← ( ٣ ، ٣٠° )

---

**هام التحويل من الصورة القطبية للصورة الاحداثية :**




**فى الشكل المقابل :**

س = المعيار × جتا θ = ‖ $\overleftarrow{و أ}$ ‖ جتا θ

، ص = المعيار × جتا θ = ‖ $\overleftarrow{و أ}$ ‖ جا θ

---

**مثال إذا كان** $\overleftarrow{أ}$ = ( ١٠ $\sqrt{٣}$ ، ٦٠° ) **أوجد الصورة الاحداثية** **الحـــــــــل**

س = ١٠ $\sqrt{٣}$ جتا ٦٠ = ٥ $\sqrt{٣}$

ص = ١٠ $\sqrt{٣}$ جا ٦٠ = ١٥ ∴ الصورة الاحداثية هى $\overleftarrow{أ}$ = ( ٥ $\sqrt{٣}$ ، ١٥ )

---

**مثال إذا كان** $\overleftarrow{أ}$ = ( ٢٤ ، ١٥٠° ) **أوجد الصورة الاحداثية** **الحـــــــــل**

س = ٢٤ جتا ١٥٠ = ــ ١٢ $\sqrt{٣}$

ص = ٢٤ جا ١٥٠ = ١٢ ∴ الصورة الاحداثية هى $\overleftarrow{أ}$ = ( ـ١٢ $\sqrt{٣}$ ، ١٢ )

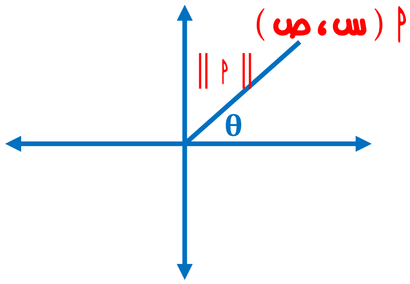
---

**تدريب إذا كان** $\overleftarrow{أ}$ = ( ٤ ، ٣٠° ) **أوجد الصورة الاحداثية** **الحـــــــــل**

---

**تدريب٢ إذا كان** أ = ( ١٢ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$ ) **أوجد الصورة الاحداثية** **الحـــــــــل**

## هام التحويل من الصوره الإحداثيه للصوره القطبيه :




**فى الشكل المقابل :**

$$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{س^2 + ص^2}$$

$$ظا\theta = \frac{ص}{س}$$

---

**مثال إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ( ٤ ، ٤$\sqrt{٣}$ ) أوجد الصوره القطبيه الحـــــل**

$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(٤)^2 + (٤\sqrt{٣})^2} = \sqrt{١٦ + ٤٨} = \sqrt{٦٤} = ٨$

$ظا\theta = \frac{٤\sqrt{٣}}{٤} = \sqrt{٣}$ ∴ $\theta = ٦٠^\circ$

∴ **الصوره القطبيه هى** أ = ( ٨ ، ٦٠° )

---

**مثال٢ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ( ٥$\sqrt{٣}$ ، ـ٥ ) أوجد الصوره القطبيه الحـــــل**

$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(٥\sqrt{٣})^2 + (-٥)^2} = \sqrt{٧٥ + ٢٥} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

$ظا\theta = \frac{-٥}{٥\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ∴ $\theta = ٣٠^\circ$

من الزوج المرتب ( ٥$\sqrt{٣}$ ، ـ٥ ) الزاويه تقع فى الربع الرابع

∴ $\theta = ٣٦٠ - ٣٠^\circ = ٣٣٠^\circ$ ∴ **الصوره القطبيه هى** أ = ( ١٠ ، ٣٣٠° )

---

**تدريب٣ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ( ـ٨$\sqrt{٣}$ ، ٨ ) أوجد الصوره القطبيه الحـــــل**

## جمع المتجهات

**مثال** إذا كان أ⃗ = ( ٢ ، ١ ) ، ب⃗ = ( ٣،٥ ) أوجد أ⃗ + ب⃗

**الحـــــــل**

أ⃗ + ب⃗ = ( ٢ ، ١ ) + ( ٣،٥ ) = ( ٥،٦ )

## ضرب عدد حقيقى فى متجه

**مثال** إذا كان أ⃗ = ( ٢ ، −٣ ) أوجد ٣ أ⃗

**الحـــــــل**

٣أ⃗ = ٣( ٢ ، −٣ ) = ( ٦ ، −٩ )

**مثال٢** إذا كان أ⃗ = ( ٢ ، −٣ ) ، ب⃗ = ( ٣،٥ ) أوجد أ⃗ + ٢ب⃗

**الحـــــــل**

أ⃗ + ٢ب⃗ = ( ٢ ، −٣ ) + ٢( ٣،٥ ) = ( ٢ ، −٣ ) + ( ٦ ، ١٠ ) = ( ٨ ، ٧ )

**مثال٣** إذا كان أ⃗ = ( ٣ ، −١ ) ، ب⃗ = ( ٢،٥ ) أوجد ٢ أ⃗ − ٣ب⃗

**الحـــــــل**

٢أ⃗ − ٣ب⃗ = ٢( ٣ ، −١ ) − ٣( ٢،٥ )

= ( ٦ ، −٢ ) + ( −٦ ، −١٥ ) = ( ٠ ، −١٧ )

**مثال٤** إذا كان أ⃗ = ( ٦ ، ١ ) ، ب⃗ = ( ١،٢ ) أوجد ‖ أ⃗ − ٢ب⃗ ‖

أ⃗ − ٢ب⃗ = ( ٦ ، ١ ) −٢( ١،٢ ) = ( ٦ ، ١ ) + ( −٢ ، −٤ ) = ( ٤ ، −٣ )

‖ أ⃗ − ٢ب⃗ ‖ = √( (٤)² + (−٣)² ) = √( ١٦ + ٩ ) = √٢٥ = ٥

**مثال** إذا كان $\vec{أ}$ = ( −٢، ٧ ) ، $\vec{ب}$ = ( ٣، −٢ ) أوجد ‖ $\vec{أ}$ + ٢ $\vec{ب}$ ‖

$\vec{أ}$ + ٢ $\vec{ب}$ = ( −٢، ٧ ) + ( ٣، −٢ ) = ( ١، ٥ )

‖ $\vec{أ}$ + ٢ $\vec{ب}$ ‖ = $\sqrt{١ + ٢٦}$ = $\sqrt{٢٧}$

---

**تدريب ٤** إذا كان $\vec{أ}$ = ( ٣ ، −١ ) ، $\vec{ب}$ = ( ٢ ، −٥ ) ، $\vec{جـ}$ = ( −٥ ، ٥ ) أوجد

١) ‖ $\vec{أ}$ − ٢ $\vec{ب}$ − $\vec{جـ}$ ‖

٢) أوجد الصوره القطبيه للمتجه م إذا كان $\vec{م}$ = $\vec{أ}$ − ٢ $\vec{ب}$ − $\vec{جـ}$

**الحـــــــــل**

**مثال للاطلاع المنزلى** إذا كان أ = ( ٣، −١ ) ، ب = ( ٢، ٥ ) ، جـ = ( −٤، ٢ ) أوجد

١) ٢أ − ٣ب  ٢) $\frac{١}{٢}$ ( ٤أ + ٢ب − جـ )  ٣) ٢و − ٣ ( جـ + أ )

حيث و متجه صفرى  **الحـــــــــل**

---

١) ٢$\vec{أ}$ − ٣$\vec{ب}$ = ٢ ( ٣، −١ ) − ٣ ( ٢، ٥ ) = ( ٦، −٢ ) + ( −٦، −١٥ ) = ( ٠، −١٧ )

٢) $\frac{١}{٢}$ ( ٤$\vec{أ}$ + ٢$\vec{ب}$ − $\vec{جـ}$ ) = $\frac{١}{٢}$ ( ( ١٢، −٤ ) + ( ٤، ١٠ ) − ( −٤، ٢ ) )

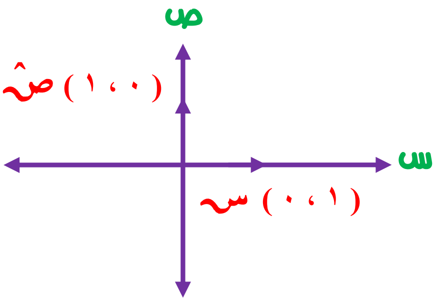
= $\frac{١}{٢}$ ( ٢٠، ٤ ) = ( ١٠، ٢ )

٣) ٢$\vec{و}$ − ٣ ( $\vec{جـ}$ + $\vec{أ}$ ) = ٢ ( ٠، ٠ ) − ٣ ( ( −٤، ٢ ) + ( ٣، −١ ) )

= ( ٠، ٠ ) − ٣ ( −١، ١ ) = ( ٠، ٠ ) + ( ٣، −٣ ) = ( ٣، −٣ )


أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

## متجهات الوحده الاساسيه




لأى نظام أحداثى متعامد فإن

المتجه $\overrightarrow{\text{س}} = (١ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{\text{ص}} = (٠ ، ١)$

يسمى بمتجها الوحدة الاساسيان

ومعيار كل منهما الوحده

---

**مثال عبر بدلالة متجهات الوحده الاساسيه :**

١) $\overrightarrow{\text{أ}} = (-٣ ، ٤)$ ← $\overrightarrow{\text{أ}} = -٣\,\overrightarrow{\text{س}} + ٤\,\overrightarrow{\text{ص}}$

٢) $\overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، -٦)$ ← $\overrightarrow{\text{ب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{س}} - ٦\,\overrightarrow{\text{ص}}$

١) $\overrightarrow{\text{جـ}} = (-٢ ، -١)$ ← $\overrightarrow{\text{جـ}} = -٢\,\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}$

٢) $\overrightarrow{\text{ء}} = (٠ ، ٢\sqrt{٢})$ ← $\overrightarrow{\text{ء}} = ٢\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}}$

٣) $\overrightarrow{\text{هـ}} = (-٣\sqrt{٣} ، ٠)$ ← $\overrightarrow{\text{هـ}} = -٣\sqrt{٣}\,\overrightarrow{\text{س}}$

---

**مثال إذا كان** $\overrightarrow{\text{أ}} = ٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}}$ **أوجد الصوره القطبيه**

**الحـــــــــل**

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(٣\sqrt{٢})^{٢} + (٣\sqrt{٢})^{٢}} = \sqrt{١٨ + ١٨} = \sqrt{٣٦} = ٦$

$\text{ظا}\,\theta = \frac{٣\sqrt{٢}}{٣\sqrt{٢}} = ١$ $\therefore \theta = ٤٥^{\circ}$

$\therefore$ الصوره القطبيه هى $\overrightarrow{\text{أ}} = (٦ ، ٤٥^{\circ})$

---

**تدريب٢ إذا كان** $\overrightarrow{\text{أ}} = ٦\,\overrightarrow{\text{س}} - ٦\sqrt{٣}\,\overrightarrow{\text{ص}}$ **أوجد الصوره القطبيه**

**تدريب منزلى إذا كان $\overleftarrow{م} = ٦\, \overleftarrow{س} - ٦\, \overleftarrow{ص}$ أوجد الصوره القطبيه**

---

**مثال٢ هام جداً إذا كان ك $\|٤\, \overleftarrow{م}\| = \|-٣\, \overleftarrow{م}\|$ فإن ك = ............**

**الحـــــــل**

ك $|٤|\, \|\overleftarrow{م}\| = |-٣|\, \|\overleftarrow{م}\|$

ك $|٤| = |-٣|$

$\therefore$ ٤ك = ٣ $\therefore$ ك = $\frac{٣}{٤}$

---

**مثال٣ هام جداً إذا كان $\|-١٥\, \overleftarrow{م}\| = \|٣ك\, \overleftarrow{م}\|$ فإن ك = ............**

**الحـــــــل**

$|-١٥|\, \|\overleftarrow{م}\| = |٣|\, |ك|\, \|\overleftarrow{م}\|$

$|-١٥| = |٣|\, |ك|$

$\therefore$ ١٥ = ٣ $|ك|$

$\therefore$ $|ك| = \frac{١٥}{٣}$ $\therefore$ ك = $\pm$ ٥

---

**تدريب إذا كان ك $\|٧\, \overleftarrow{م}\| = \|-٥\, \overleftarrow{م}\|$ فإن ك = ............ الحـــــــل**


أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**تدريب٢** إذا كان ‖ −٩ أ ‖ = ٣ ‖ ك أ ‖ فإن ك = ............

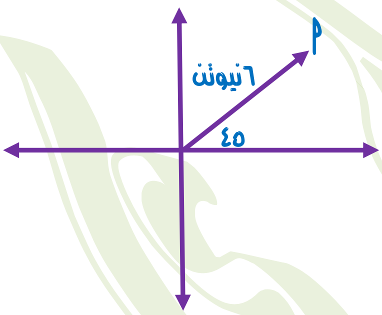
---

**تدريب منزل** إذا كان ‖ −٨ أ ‖ = ‖ ٥ ك أ ‖ فإن ك = ............

---

**مثال ١** قوه مقدارها ٦ نيوتن تؤثر فى إتجاه الشمال الشرقى أوجد الصوره القطبيه و الإحداثيه

## الحـــــــــــل




الصوره القطبيه $\overleftarrow{أ}$ = ( ٦ ، ٤٥° )

، س = ١٠ $\sqrt{٣}$ جتا٦٠ = ٥ $\sqrt{٣}$

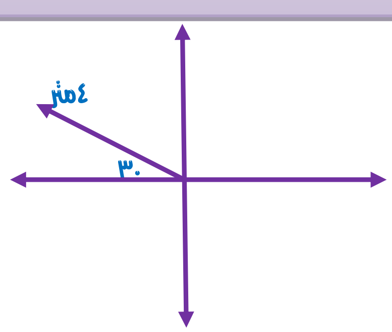
ص = ١٠ $\sqrt{٣}$ جا٦٠ = ١٥

∴ الصوره الإحداثيه هى $\overleftarrow{أ}$ = ( ٥ $\sqrt{٣}$ ، ١٥ )

---

**مثال ٢** سرعه منتظمه لسياره تقطع ٤ أمتار كل ثانيه فى إتجاه ٣٠° شمال الغرب أوجد الصوره القطبيه و الإحداثيه

## الحـــــــــــل




$\theta$ = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠

الصوره القطبيه أ = ( ٤ ، ١٥٠° )

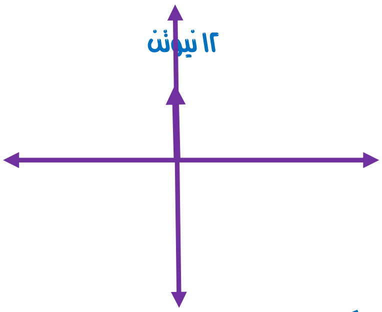
، س = ٤ جتا١٥٠ = −٢ $\sqrt{٣}$

ص = ٤ جا١٥٠ = ٢

∴ الصوره الإحداثيه هى أ = ( −٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢ )

**مثال ٣ إذا كان إزاحو جسم ١٢ نيوتن فى إتجاه الشمال أوجد الصوره القطبيه و الإحداثيه**

**الحـــــل**




$\theta$ = ٩٠

الصوره القطبيه = أ = ( ١٢ ، ٩٠° )

، س = ١٢ جتا٩٠ = ٠

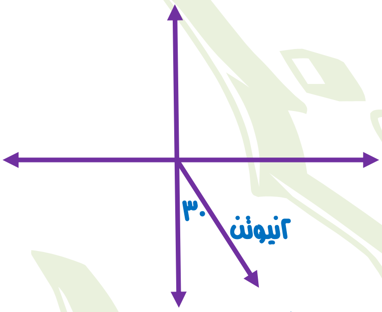
ص = ٤ جا٩٠ = ١٢

∴ الصوره الاحداثيه هى أ = ( ٠ ، ١٢ )

---

**مثال ٤ قوه مقدارها ٢نيوتن تؤثر فى إتجاه ٣٠ شرق الجنوب أوجد الصوره القطبيه و الإحداثيه**

**الحـــــل**




$\theta$ = ٢٧٠ + ٣٠ = ٣٠٠

الصوره القطبيه = أ = ( ٤ ، ٣٠٠° )

، س = ٢ جتا٣٠٠ = ١

ص = ٢ جا٣٠٠ = − √٣

∴ الصوره الاحداثيه هى أ = ( ١ ، − √٣ )

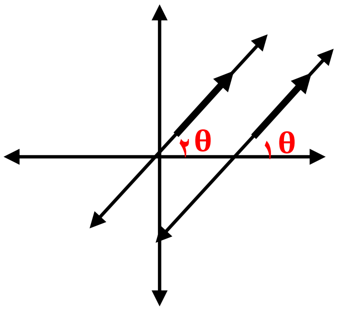
---

**تدريب قوه مقدارها ٢٠نيوتن تؤثر فى إتجاه ٣٠ شرق الشرق أوجد الصوره القطبيه و الإحداثيه**

**الحـــــل**

## شرط توازى متجهين

ميل المتجه الأول = ميل المتجه الثانى




$\text{ظا}\theta_1 = \text{ظا}\theta_2$

$\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2}{\text{س}_2}$

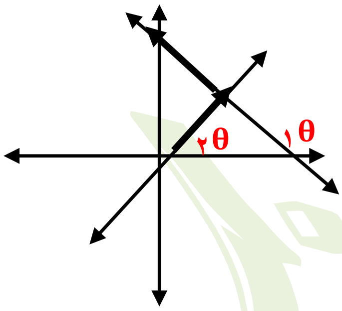
$\text{س}_1\text{ص}_2 - \text{س}_2\text{ص}_1 = ٠$

والعكس صحيح

---

## شرط تعامد متجهين

ميل المتجه الأول × ميل المتجه الثانى = −١




$\text{ظا}\theta_1 \times \text{ظا}\theta_2 = -١$

$\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} \times \frac{\text{ص}_2}{\text{س}_2} = -١$

$\text{س}_1\text{س}_2 + \text{ص}_1\text{ص}_2 = ٠$

والعكس صحيح

---

**مثال** إذا كان $\overleftarrow{\text{ل}}$ = ( ٣ ، ٦ ) ، $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ( ٦ ، ١٢ ) إثبت أن $\overleftarrow{\text{ل}} \,//\, \overleftarrow{\text{ن}}$ **الحـــــــل**

$\because \text{م}_1 = \frac{٦}{٣} = ٢$ ، $\text{م}_2 = \frac{١٢}{٦} = ٢$

$\because \text{م}_1 = \text{م}_2$ $\therefore \overleftarrow{\text{ل}} \,//\, \overleftarrow{\text{ن}}$

---

**مثال٢** إذا كان ل = −٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، ن = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$

إثبت أن $\overleftarrow{\text{ل}} \perp \overleftarrow{\text{ن}}$ **الحـــــــل**

$\because \text{م}_1 = \frac{١}{-٢}$ ، $\text{م}_2 = \frac{٤}{٢} = ٢$

$\because \text{م}_1 \times \text{م}_2 = \frac{١}{-٢} \times = -١$ $\therefore \overleftarrow{\text{ل}} \perp \overleftarrow{\text{ن}}$

**مثال٣ إذا كان $\vec{أ}$ = ( -٢ ، ٣ ) ، $\vec{ب}$ = ( ٤ ، ك ) أوجد قيمة ك إذا كان $\vec{أ} // \vec{ب}$ الحـــل**

∵ $\vec{أ} // \vec{ب}$ ∴ $م_1 = م_2$

$\frac{٣}{-٢} = \frac{ك}{٤}$ ∴ ك = $\frac{٣ \times ١٢}{-٢}$ = -٦

**مثال٤ إذا كان $\vec{أ}$ = ( -٢ ، ٣ ) ، $\vec{ب}$ = ( -٤ ، م ) أوجد قيمة م إذا كان $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ الحـــل**

∵ $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ ∴ $م_1 \times م_2$ = -١

$\frac{٣}{-٢} \times \frac{م}{-٤}$ = -١

$\frac{٣ك}{٨}$ = -١

∴ ٣ك = ٨ × -١

∴ ٣ك = -٨ ∴ ك = $\frac{-٨}{٣}$

**تدريب إذا كان $\vec{أ}$ = ٣ $\vec{س}$ + ٢ $\vec{ص}$ ، $\vec{ب}$ = ( ٢ ، -٣ ) إثبت أن $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ الحـــل**

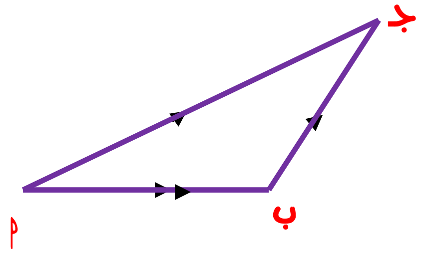
**تدريب٢ إذا كان $\vec{أ}$ = ( ك ، -٨ ) ، $\vec{ب}$ = ( ٣ ، ٣ ) أوجد قيمة ك إذا كان $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ الحـــل**

**تدريب٣ إذا كان $\vec{أ}$ = ( ٢ ، ٣ ) ، $\vec{ب}$ = ( ك ، ٦ ) أوجد قيمة ك إذا كان $\vec{أ} // \vec{ب}$ الحـــل**

# العمليات على المتجهات

## جمع المتجهات هندسياً

**قاعدة المثلث لجمع متجهين ( قاعدة شال )**




**فى الشكل المقابل :**

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{جـب}}$

أى أن الإزاحه $\overrightarrow{\text{أب}}$ ( من نقطة أ إلى ب ) تكافئ إزاحه $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ ( من نقطة أ إلى جـ )

متبوعه بإزاحه أخرى $\overrightarrow{\text{جـب}}$ ( من نقطة جـ إلى ب )

---

### لاحظ أن

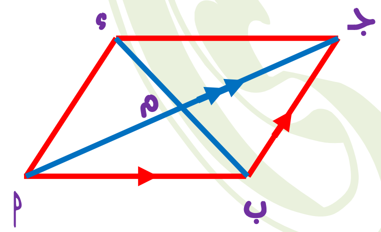
١) $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{جـب}}$

٢) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{جـأ}} = \overrightarrow{0}$

٣) طرح متجهين $\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـب}}$

---

## قاعدة متوازى الأضلاع




فى الشكل المقابل : أ ب جـ ء متوازى أضلاع

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$

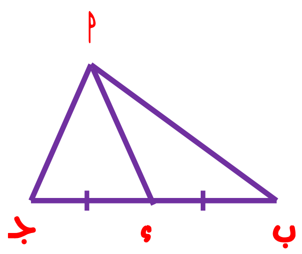
$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$ حيث $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ يكافئ $\overrightarrow{\text{أء}}$

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = ٢ \overrightarrow{\text{أم}}$ حيث $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ يكافئ $٢ \overrightarrow{\text{أم}}$

---

### لاحظ أن

فى الشكل المقابل : إذا كان $\overrightarrow{\text{أء}}$ متوسط فإن :



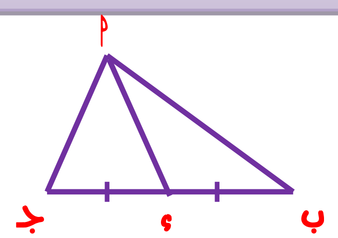

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{أء}}$

، $\overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{جـأ}} = ٢ \overrightarrow{\text{ءأ}}$ لاحظ ان المتجهات تخرج من نقطه واحده أو تدخل لنقطه واحده



أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

## مثال١ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه ء منتصف ب جـ إثبت أن أب + أجـ = ٢ أء   الحـــل



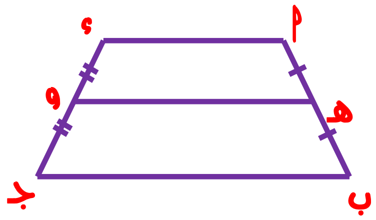

الطرف الأيمن = أب + أجـ

= أء + ءب + أء + ءجـ

= ٢ أء   حيث ءب ، ءجـ متساويان

---

## مثال٢ إذا كان أ ب جـ ء شكل رباعى ، هـ منتصف أ ب ، و منتصف جـ ء إثبت أن ب جـ + أ ء = ٢ هـ و




### الحـــل

الطرف الأيمن = ب جـ + أ ء

= ب هـ + هـ و + و جـ + أ هـ + هـ و + و ء

= ٢ هـ و   وهو المطلوب إثباته

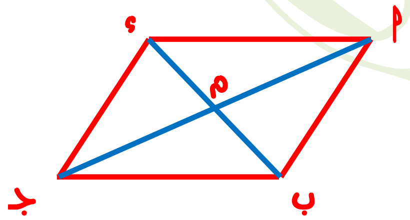
حيث ( ب هـ ، أ هـ ) ، ( و جـ ، و ء ) متساويان فى المقدار ومتضادان فى الاتجاه

---

## مثال٣ أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م إثبت أن

١) أ جـ + ء ب = ٢ أ ب      ٢) أ جـ - ء ب = ٢ ب جـ

### الحـــل




الطرف الأيمن = أ جـ + ء ب

= أ ب + ب جـ + ء أ + أ ب

= ٢ أ ب   المطلوب أولا

الطرف الأيمن = أ جـ - ء ب

= أ ب + ب جـ - ( ء جـ + جـ ب ) = أ ب + ب جـ - ء جـ - جـ ب

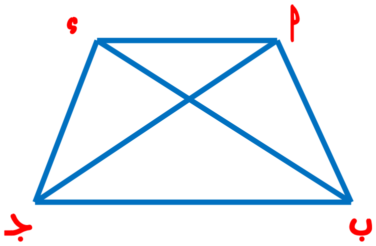
= أ ب + ب جـ + جـ ء + ب جـ = ٢ ب جـ   المطلوب ثانيا

**تدريب١ في أى شكل رباعى أ ب جـ ء أثبت أن**

١) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{جـء}} = \overrightarrow{\text{أء}}$

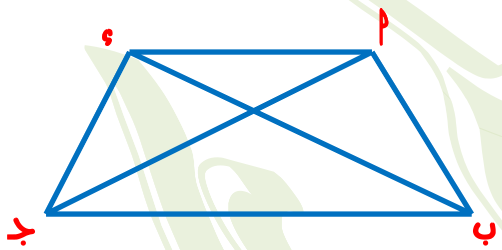
٢) $\overrightarrow{\text{أجـ}} - \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أء}} - \overrightarrow{\text{بء}}$

## الحـــــل




**مثال٤ في الشكل الرباعى أ ب جـ ء الذى فيه $\overrightarrow{\text{بجـ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{أء}}$ أثبت أن $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = ٤\,\overrightarrow{\text{أء}}$**

## الحـــــل




الطرف الأيمن = $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{بء}}$

= $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{جـء}}$

= $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} + ٣\,\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{جـء}}$

= $٤\,\overrightarrow{\text{أء}}$

**تدريب٢ في الشكل الرباعى أ ب جـ ء الذى فيه $٢\,\overrightarrow{\text{بجـ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{أء}}$**

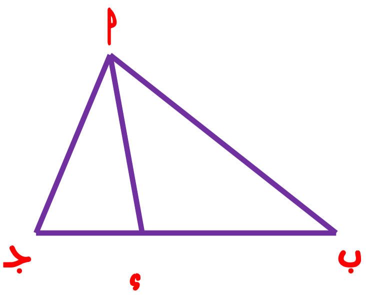
١) أثبت أن أ ب جـ ء شبه منحرف

٢) $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = \frac{٥}{٢}\,\overrightarrow{\text{أء}}$

**مثال٥ فى المثلث أ ب جـ إذا كان ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ٢ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$**

**أثبت أن ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ = ٥ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$**

## الحـــــــــل




الطرف الأيمن = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

= ٢ ( $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ ) + ٣ ( $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ )

= ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$

= ٥ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$

= ٥ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

---

**تدريب ٣ فى المثلث أ ب جـ إذا كان ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ٣ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$**

**أثبت أن ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$**

## مثال ٦ إذا كان ٣ ن − ٢ س ص = ٦ ع ص + ٨ ص س أثبت أن ن = ٢ ع س

### الحـــــل

∵ ٣ ن − ٢ س ص = ٦ ع ص + ٨ ص س

∴ ٣ ن = ٦ ع ص + ٨ ص س + ٢ س ص

∴ ٣ ن = ٦ ع ص + ٨ ص س − ٢ ص س

∴ ٣ ن = ٦ ع ص + ٦ ص س بالقسمة على ٣

∴ ن = ٢ ع ص + ٢ ص س

∴ ن = ٢ ( ع ص + ص س )

∴ ن = ٢ ( ع س )

∴ ن = ٢ ع س

---

## تدريب ٤ إذا كان ٤ م − ٣ س ص = ٤ ع ص + ٧ ص س أثبت أن م = ٤ ع س

### الحـــــل

**مثال ٧ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-١ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ١) أوجد $\|\overrightarrow{\text{أ ب}}\|$**

**الحـــــــل**

$\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ١) - (-١ ، ٥) = (٣ ، -٤)

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ ب}}\|$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

---

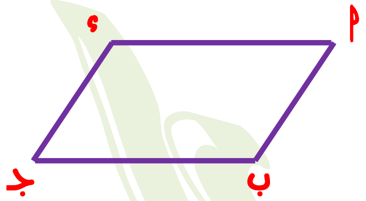
**تدريب إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، -٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٦ ، ٢) أوجد $\|\overrightarrow{\text{أ ب}}\|$**

**الحـــــــل**

---

**مثال ٨ أ ب جـ ء متوازي أضلاع $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ء}}$ = (-٢ ، -١) أوجد إحداثي $\overrightarrow{\text{جـ}}$**

**الحـــــــل**




$\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$

$\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$ - $\overrightarrow{\text{ء}}$

$\overrightarrow{\text{جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ء}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$

$\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٠ ، ٤) + (-٢ ، -١) - (٣ ، ٠) = (-٥ ، ٣)

---

**تدريب ٦ أ ب جـ ء متوازي أضلاع $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (-٣ ، -٤)**

**، $\overrightarrow{\text{ء}}$ = (٢ ، ص) أوجد قيمة س ، ص**

**الحـــــــل**

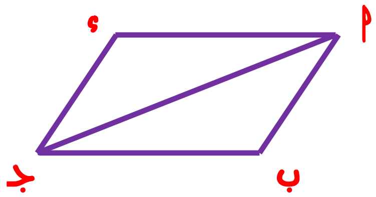
**مثال١ إثبت أنه إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى أى شكل رباعى فإن الضلعين الأخرين يكونان متساويان ومتوازيان أى أن الشكل يكون متوازى أضلاع**

**الحـــــــــل**

**المعطيات** | أ ب جـ ء شكل رباعى $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$ ، أ ب = ء جـ

**المطلوب** | أ ء = ب جـ

**العمل** | نرسم $\overline{\text{أ جـ}}$




**البرهان** | $\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⟵ ١

، $\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}}$ ⟵ ٢

من ١ ، ٢ ∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}}$ حيث $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ء جـ}}$ معطى

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ء}}$

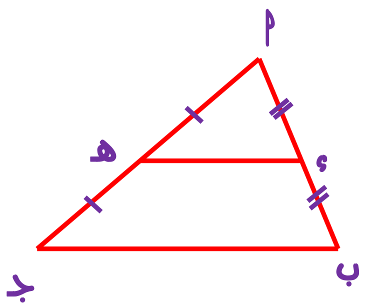
∴ ب جـ = أ ء ، $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ∴ الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع

---

**مثال٢ إثبت أن القطعه المستقمه المرسومه بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى وتساوى نصف طول الضلع الثالث**

**المعطيات** | ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

**المطلوب** | $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ




**البرهان** | فى △ ء أ هـ ∵ $\overrightarrow{\text{ء هـ}} = \overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{أ هـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء هـ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب أ}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء هـ}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع نثبت أن $\overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{ء جـ}$ ( أى ان كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويان )

لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء مستطيل نثبت أن الشكل متوازى أضلاع ( $\overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{ء جـ}$ ) ثم نثبت أن

$\overline{أ ب} \perp \overline{ب جـ}$ أو $\|\overleftarrow{أ جـ}\| = \|\overleftarrow{ب ء}\|$

لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء معين نثبت أن الشكل متوازى أضلاع ( $\overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{ء جـ}$ ) ثم نثبت أن

$\overline{أ جـ} \perp \overline{ب ء}$ أو $\|\overleftarrow{أ ب}\| = \|\overleftarrow{ب جـ}\|$

لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء مربع نثبت أن الشكل متوازى أضلاع ( $\overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{ء جـ}$ ) ثم نثبت أن

ثم نثبت خاصيه من المعين وخاصيه من المستطيل

---

**مثال٣** إثبت أن أ ب جـ ء معين إذا كان $\overleftarrow{أ} = (-١ ، ٤)$ ، $\overleftarrow{ب} = (١ ، ١)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (-١ ، -٢)$ ، $\overleftarrow{ء} = (-٣ ، ١)$

$\overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ} = (١ ، ١) - (-١ ، ٤) = (٢ ، -٣)$ ⟵ ١

$\overleftarrow{ء جـ} = \overleftarrow{جـ} - \overleftarrow{ء} = (-١ ، -٢) - (-٣ ، ١) = (٢ ، -٣)$ ⟵ ٢

من ١ ، ٢ ∴ $\overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{ء جـ}$ ∴ الشكل متوازى أضلاع ⟵ ٣

، $\|\overleftarrow{أ ب}\| = \sqrt{(٢)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$ ⟵ ٤

، $\overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{جـ} - \overleftarrow{ب} = (-١ ، -٢) - (١ ، ١) = (-٢ ، -٣)$

، $\|\overleftarrow{ب جـ}\| = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$ ⟵ ٥

من ٣ ، ٤ ، ٥ ∴ الشكل أ ب جـ ء معين

---

**مثال٤** أوجد نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ إذا كان $\overleftarrow{أ} = (٢ ، ١)$ ، $\overleftarrow{ب} = (١ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٦ ، -٣)$

$م = \left( \frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} \right) = \left( \frac{٢ + ١ + ٦}{٣} ، \frac{١ + ٥ - ٣}{٣} \right)$

$= \left( \frac{٩}{٣} ، \frac{٣}{٣} \right) = (٣ ، ١)$


أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**مثاله إذا أثرت القوى $\overrightarrow{ق_1}$ = ٥$\overrightarrow{س}$ + ٢$\hat{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ( −٢ ، ٧ ) ، $\overrightarrow{ق_3}$ = ٢$\overrightarrow{س}$ − $\hat{ص}$**

**فى نقطة ماديه أوجد مقدار واتجاه المحصله حيث القوى مقاسه بالنيوتن**

## الحـــــل

القوى المحصله : $\overrightarrow{ق}$ = ( ٥ ، ٢ ) + ( −٢ ، ٧ ) + ( ٢ ، −١ ) = ( ٥ ، ٨ )

مقدار المحصله $\|\overrightarrow{ق}\|$ = $\sqrt{(٥)^2 + (٨)^2}$ = $\sqrt{٢٥ + ٦٤}$ = $\sqrt{٨٩}$ نيوتن

ظا θ = $\frac{٨}{٥}$ ∴ θ ≈ ٥٨°

أى ان محصلة القوى تصنع زاويه قياسها ٥٨° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

---

**تدريب١ إذا أثرت القوى $\overrightarrow{ق_1}$ = ٥$\overrightarrow{س}$ + ٣$\hat{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ( −٢ ، ٧ ) ، $\overrightarrow{ق_3}$ = ٣$\overrightarrow{س}$ − $\hat{ص}$**

**فى نقطة ماديه أوجد مقدار واتجاه المحصله حيث القوى مقاسه بالنيوتن**


أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**ملحوظه هامه :** إذا كانت القوى المحصلة تساوى صفر فإن الجسم يكون متزن والعكس صحيح

**مثال٦** إذا كان ق١ = ( ٤ ، -٢ ) ، ق٢ = م س - ص ، ق٣ = ( -٥ ، ب ) أوجد م ، ب إذا كان

١) القوى متزنه ٢) القوى المحصله = ٢س - ص

## الحـــــــل

**أولاً إذا كانت القوى متزنه :** ∴ ق١ + ق٢ + ق٣ = ٠

( ٤ ، -٢ ) + ( م ، -١ ) + ( -٥ ، ب ) = ٠

( ٤ + م - ٥ ، -٢ - ١ + ب ) = ٠

( م - ١ ، ب - ٣ ) = ( ٠ ، ٠ )

∴ م - ١ = ٠ ، ب - ٣ = ٠

∴ م = ١ ب = ٣

**ثانياً إذا كانت القوى المحصله = ٢س - ص**

∴ ق١ + ق٢ + ق٣ = ٢س - ص

∴ ( ٤ ، -٢ ) + ( م ، -١ ) + ( -٥ ، ب ) = ( ٢ ، -١ )

( م - ١ ، ب - ٣ ) = ( ٢ ، -١ )

∴ م - ١ = ٢ ، ب - ٣ = -١

∴ م = ٣ ب = ٢

## السرعه النسبيه :

بفرض هناك جسمان م ، ب فإن

$ع_م$ هى السرعه الفعليه للجسم م ، $ع_ب$ هى السرعه الفعليه للجسم ب

$ع_{مب}$ هى سرعة م بالنسبه لـ ب ، $ع_{بم}$ هى سرعة ب بالنسبه لـ م

---

**مثال٧ تتحرك سياره م على طريق مستقيم بسرعه ٩٠ كم وتتحرك سياره ب على نفس الطريق بسرعه ٥٠ كم أوجد سرعة م بالنسبه لـ ب إذا كان**

**١) السيارتان تتحركان فى إتجاه واحد ٢) السيارتان تتحركان فى إتجاهين متضادين**

### الحـــــــل

بفرض أن ى متجه فى إتجاه السياره م

**أولاً إذا كانت السيارتان تتحركان فى إتجاه واحد**

$ع_م$ = ٩٠ى

$ع_ب$ = ٥٠ى

$ع_{مب}$ = $ع_م$ − $ع_ب$ = ٩٠ى − ٥٠ى = ٤٠ى

أى أن راكب السياره ب يرى السياره م تتحرك بسرعه ٤٠ نيوتن

**ثانياً إذا كانت السيارتان تتحركان فى إتجاهين متضادين**

$ع_م$ = ٩٠ى

$ع_ب$ = − ٥٠ى

$ع_{مب}$ = $ع_م$ − $ع_ب$ = ٩٠ى − (− ٥٠ى) = ٩٠ى + ٥٠ى

= ١٤٠ى

أى أن راكب السياره ب يرى السياره م تتحرك بسرعه ١٤٠ نيوتن



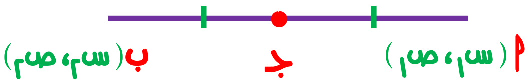


أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

# تقسيم قطعه مستقيمه

درسنا فى ماسبق تنصيف قطعه مستقيمه $\overline{\text{ا ب}}$

حيث ا ( س١ ، ص١ ) ، ب ( س٢ ، ص٢ )




فإن أحداثى منتصف المسافة بين ا ب هو

$$\text{جـ} = \left( \frac{\text{س١} + \text{س٢}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص١} + \text{ص٢}}{٢} \right)$$

---

**مثال** أوجد إحداثى نقطة م منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا = ( ٣ ، ٥ ) ، ب = ( ١ ، -١ )

**الحـــــــل**

$$\text{م} = \left( \frac{٣ + ١}{٢} \text{ ، } \frac{٥ - ١}{٢} \right) = (٢ ، ٢)$$

---

**مثال٢** إذا كان ( ٣ ، ٦ ) هى منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ بحيث ا = ( -٣ ، ٧ ) أوجد إحداثى ب

**الحـــــــل** بفرض أن ب ( س ، ص )

$$(٣،٦) = \left( \frac{-٣ + \text{س}}{٢} \text{ ، } \frac{٧ + \text{ص}}{٢} \right)$$

$$\frac{-٣ + \text{س}}{٢} = ٣$$

-٣ + س = ٦

س = ٩

$$\frac{٧ + \text{ص}}{٢} = ٦$$

٧ + ص = ١٢

ص = ١٢ - ٧ = ٥

∴ ب = (٩،٥)

---

**تدريب** أوجد إحداثى نقطة م منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا = ( ٤ ، -٣ ) ، ب = ( -٢ ، ٥ )

**تدريب٢ إذا كان جـ (١،٢) هى منتصف $\overline{أ ب}$ ، ب (٣،٠) فأوجد أ**

**الحـــــــــــل**

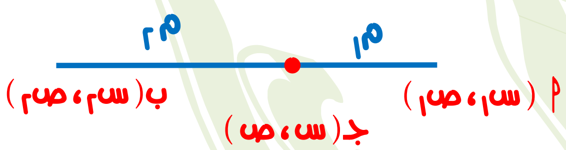
---

**تدريب منزلى إذا كانت جـ منتصف أ ب فأوجد س، ص حيث أ ( س، ٣ ) ، ب (٦، ص ) ، جـ (٤،٦)**

**الحـــــــــــل**

---

**التقسيم من الداخل : إذا كانت جـ تقسم أ ب من الداخل فإن إحداثى جـ هو**




$$س = \frac{م_1 س_2 + م_2 س_1}{م_1 + م_2} \quad ، \quad ص = \frac{م_1 ص_2 + م_2 ص_1}{م_1 + م_2}$$

**حيث $م_1 : م_2$ هى نسبة التقسيم**

---

**التقسيم من الخارج : لإيجاد أحداثى النقطه جـ ( س ، ص )**

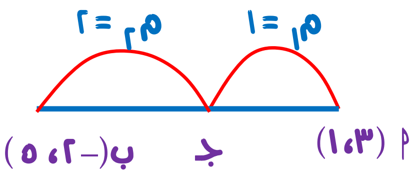
$$س = \frac{م_1 س_2 - م_2 س_1}{م_1 - م_2} \quad ، \quad ص = \frac{م_1 ص_2 - م_2 ص_1}{م_1 - م_2}$$

## مثال ٣ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ( ١ ، ٢ ) ، $\overrightarrow{ب}$ = ( ٤ ، ٥ ) أوجد أحداثى جـ التى تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

### الحـــــــل

$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢}$$

$$= \frac{١ \times ٤ + ٢ \times ١}{١ + ٢} = \frac{٤ + ٢}{٣} = \frac{٦}{٣} = ٢$$




$$، ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢}$$

$$= \frac{١ \times ٥ + ٢ \times ٢}{١ + ٢} = \frac{٥ + ٤}{٣} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

∴ جـ ( ٢ ، ٣ )

---

## مثال ٤ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ( ٣ ، -١ ) ، $\overrightarrow{ب}$ = ( ٥ ، ٢ ) أوجد أحداثى جـ التى تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل

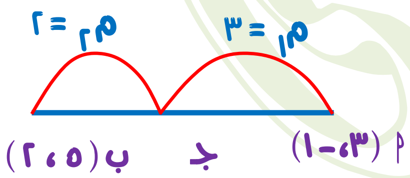
بحيث ٢ أ جـ = ٣ جـ ب

### الحـــــــل

$$\frac{أ جـ}{جـ ب} = \frac{٣}{٢}$$

$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢}$$

$$= \frac{٣ \times ٥ + ٢ \times ٣}{٣ + ٢} = \frac{١٥ + ٦}{٥} = \frac{٢١}{٥}$$




$$، ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢}$$

$$= \frac{٣ \times ٢ + ٢ \times -١}{٣ + ٢} = \frac{٦ - ٢}{٥} = \frac{٤}{٥}$$

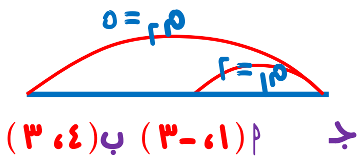
∴ جـ $\left( \frac{٢١}{٥} ، \frac{٤}{٥} \right)$

---

## تدريب ٣ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ( ١ ، ٣ ) ، $\overrightarrow{ب}$ = ( -٤ ، -٢ ) أوجد أحداثى جـ إذا كانت جـ ∈ $\overline{أ ب}$ بحيث ٣ أ جـ = ٢ جـ ب

**مثال ٥ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = ( ١، -٣ ) ، $\overleftarrow{ب}$ = ( ٤، ٣ ) أوجد أحداثى جـ التى تقسم $\overline{أ ب}$ من الخارج بنسبة ٢ : ٥**

## الحـــــــــل




$$س = \frac{م_١ س_٢ - م_٢ س_١}{م_١ - م_٢}$$

$$= \frac{٢ \times ٤ - ٥ \times ١}{٢ - ٥} = \frac{٨ - ٥}{-٣} = \frac{٣}{-٣} = -١$$

$$، ص = \frac{م_١ ص_٢ - م_٢ ص_١}{م_١ - م_٢}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - ٥ \times -٣}{٢ - ٥} = \frac{٦ + ١٥}{-٣} = \frac{٢١}{-٣} = -٧$$

∴ جـ ( -١ ، -٧ )

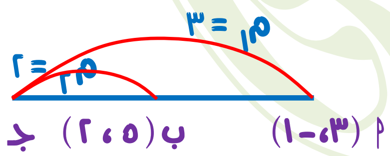
---

**مثال ٦ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = ( ٣، -١ ) ، $\overleftarrow{ب}$ = ( ٥، ٢ ) أوجد أحداثى جـ إذا كان : جـ ∈ $\overleftarrow{أ ب}$ ، جـ ∉ $\overline{أ ب}$**

**بحيث ٢ أ جـ = ٣ جـ ب**

## الحـــــــــل

$$\frac{أ جـ}{جـ ب} = \frac{٣}{٢}$$




$$س = \frac{م_١ س_٢ - م_٢ س_١}{م_١ - م_٢}$$

$$= \frac{٣ \times ٥ - ٢ \times ٣}{٣ - ٢} = \frac{١٥ - ٦}{١} = ٩$$

$$، ص = \frac{م_١ ص_٢ - م_٢ ص_١}{م_١ - م_٢}$$

$$= \frac{٣ \times ٢ - ٢ \times -١}{٣ - ٢} = \frac{٦ + ٢}{١} = ٨$$

∴ جـ ( ٩ ، ٨ )



أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**مثال ٧** إذا كان $\overrightarrow{أ} = (١ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، -٩)$ ، $\overrightarrow{ج} = (٥ ، ٥)$

١) أوجد النسبة التى تقسم بها ج القطعة $\overline{أ ب}$ مبيناً نوع التقسيم

٢) أوجد النسبة التى تقسم بها أ القطعة $\overline{ب ج}$ مبيناً نوع التقسيم

## الحــــــــل

$$\because س = \frac{م_1 س_2 + م_2 س_1}{م_1 + م_2}$$

$$\therefore ٥ = \frac{م_1 \times -٢ + م_2 \times ١}{م_1 + م_2} \qquad \therefore ٥ = \frac{-٢م_1 + م_2}{م_1 + م_2}$$

$$\therefore ٥م_1 + ٥م_2 = -٢م_1 + م_2$$

$$\therefore ٥م_1 + ٢م_1 = م_2 - ٥م_2 \qquad \therefore ٧م_1 = -٤م_2$$

$\therefore \frac{م_1}{م_2} = \frac{-٤}{٧}$ الاشاره سالبه يكون التقسيم من الخارج

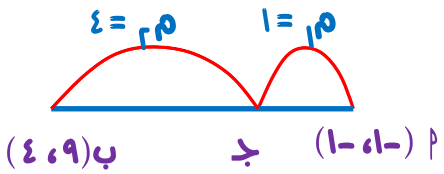
$\therefore$ ج تقسم أ ب من الخارج بنسبة $\frac{٤}{٧}$

**أكمل لإيجاد نسبه التى تقسم بها أ القطعه ب ج مبيناً نوع التقسيم**

**مثال ٨ أوجد إحداثى جـ التى تقع عند خمس المسافه من النقطه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ( -١، -١ ) الى النقطه ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = ( ٩، ٤ )**

**الحـــــــــل**

$\text{س} = \dfrac{\text{م}_1 \text{س}_2 + \text{م}_2 \text{س}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$




$= \dfrac{١ \times ٩ \ + \ ٤ \times -١}{١ + ٤} = \dfrac{٩ - ٤}{٥} = \dfrac{٥}{٥} = ١$

$، \ \text{ص} = \dfrac{\text{م}_1 \text{ص}_2 + \text{م}_2 \text{ص}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$

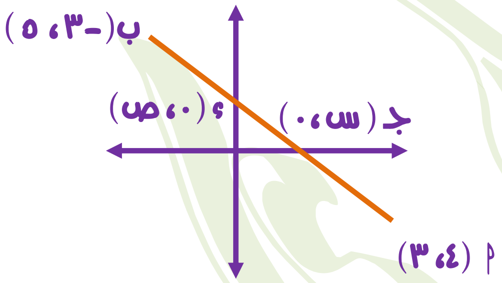
$= \dfrac{١ \times ٤ \ + \ ٤ \times -١}{١ + ٤} = \dfrac{٤ - ٤}{٥} = \dfrac{٠}{٥} = ٠$ ∴ جـ ( ١، ٠ )

---

**مثال ٨ أوجد النسبه التى تنقسم بها أ ب بكل من نقطتى تقاطعهما مع محورى الاحداثيات إذا كان أ = ( ٤، -٣ ) ، ب = ( ٩، ٤ )**

**الحـــــــــل**

**أولاً لايجاد نقطة جـ من الرسم الموضح**




$\therefore \text{ص} = \dfrac{\text{م}_1 \text{ص}_2 + \text{م}_2 \text{ص}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$

$٠ = \dfrac{\text{م}_1 \times ٥ \ + \ \text{م}_2 \times -٣}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$ $\therefore ٥\text{م}_1 - ٣\text{م}_2 = ٠$

$\therefore ٥\text{م}_1 = ٣\text{م}_2$ $\therefore \dfrac{\text{م}_1}{\text{م}_2} = \dfrac{٣}{٥}$ ∴ جـ تقسم أ ب بنسبة ٣ : ٥

**ولايجاد احدثى جـ ( س، ٠ )**

$\text{س} = \dfrac{\text{م}_1 \text{س}_2 + \text{م}_2 \text{س}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$

$= \dfrac{٣ \times -٣ \ + \ ٥ \times ٤}{٣ + ٥} = \dfrac{-٩ + ٢٠}{٨} = \dfrac{١١}{٨}$ ∴ جـ ( $\dfrac{١١}{٨}$، ٠ ) **أكمل لايجاد إحداثى ء**

## مثال ٨ إذا كان أ = ( ٢ ، ٣ ) ، ب = ( -٢ ، ١ ) أوجد النسبه التى تقسم بها أ ب بمحور السينات

### الحـــــــل

∵ المستقيم يقطع محور السينات ∴ ص = ٠

∴ م١ ص٢ + م٢ ص١ = ٠

∴ م١ × ١ + م٢ × ٣ = ٠

∴ م١ + ٣م٢ = ٠ ∴ م١ = - ٣م٢ ∴ $\frac{م_1}{م_2} = \frac{-٣}{١}$ والتقسيم من الخارج

---

**ملحوظه :** لإيجاد التقسيم من الداخل أو الخارج بإستخدام الصيغه المتجهه

١) التقسيم من الداخل ر = $\frac{ل_1 ر_2 + ل_2 ر_1}{ل_1 + ل_2}$

٢) التقسيم من الخارج ر = $\frac{ل_1 ر_2 - ل_2 ر_1}{ل_1 - ل_2}$

---

## مثال٣ إذا كان أ = (١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٥) أوجد أحداثى جـ التى تقسم أب من الداخل بنسبة ١ : ٢

### الحـــــــل

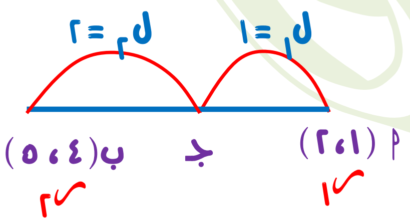
ر = $\frac{ل_1 ر_2 + ل_2 ر_1}{ل_1 + ل_2}$

= $\frac{١(٤ ، ٥) + ٢(١ ، ٢)}{١ + ٢}$

= $\frac{(٤ ، ٥) + (٢ ، ٤)}{٣}$

= $\frac{(٦ ، ٩)}{٣}$

∴ ر = (٢ ، ٣)



# معادلة الخط المستقيم

الصوره العامه لمعادلة الخط المستقيم : أ س + ب ص + جـ = ٠

وإيجاد هذه المعادله يكون من ميل المستقيم $م = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$

حيث ( $س_1$ ، $ص_1$ ) هى النقطه التى يمر بها المستقيم ، م هو ميل المستقيم

---

## ميل المستقيم

| الميل بمعلومية | الميل بمعلومية | الميل بمعلومية |
|---|---|---|
| زاويه θ | نقطتين ( $س_1$ ، $ص_1$ ) ، ( $س_2$ ، $ص_2$ ) | معادله أ س + ب ص + جـ = ٠ |
| الميل = ظا θ | الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ | الميل = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ |
| مثال ١ أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاويه قياسها ١٣٥° | مثال ٢ أوجد ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين ( ٣ ، ٦ ) ، ( ٢ ، ٤ ) | مثال ٣ أوجد ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س + ٢ ص = ٤ |
| الحل | الحل | الحل |
| الميل = ظا ١٣٥ = -١ | الميل = $\frac{٤ - ٦}{٢ - ٣} = \frac{-٢}{-١} = ٢$ | الميل = $\frac{-٣}{٢}$ |

---

**مثال ٤ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يمر بالنقطه ( ٣ ، -١ ) وميله $\frac{-٣}{٤}$**

### الحل

∵ $م = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ ⟵ ∴ $\frac{ص + ١}{س - ٣} = \frac{-٣}{٤}$ ⟵ ∴ ٤( ص+١ ) = -٣ ( س-٣ )

∴ ٤ص+٤ = -٣س+٩ ⟵ ∴ ٣س+٤ص-٥ = ٠

## مثال ٥ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يصنع زاويه ٤٥ ويمر بالنقطه ( ٣ ، ٢ )

الحـــــــــل

الميل = ظا٤٥ = ١

$\because$ $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م

$\therefore$ $\frac{ص - ٢}{س - ٣}$ = ١

$\therefore$ ص - ٢ = س - ٣ $\therefore$ س - ص - ١ = ٠

---

## مثال ٦ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يمر بالنقطتين ( ٤ ، -٢ ) ، ( ٥ ، ٣ )

الحـــــــــل

الميل = $\frac{٣ + ٢}{٥ - ٤}$ = $\frac{٥}{١}$ = ٥

$\because$ $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م

$\therefore$ $\frac{ص - ٣}{س - ٥}$ = ٥

$\therefore$ ٥ ( س - ٥ ) = ص - ٣

$\therefore$ ٥س - ٢٥ = ص - ٣ $\therefore$ ٥س - ص - ٢٢ = ٠

---

## مثال ٧ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى ميله ٣ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءاً طوله ٧ وحدات طوليه

الحـــــــــل

ص = م س + جـ حيث م هو ميل المستقيم ، جـ الجزء المقطوع من محور الصادات

$\therefore$ ص = ٣ س - ٧

لإيجاد معادلة المستقيم الذى يقطع محور السينات فى ( أ ، ٠ ) ، ويقطع محور الصادات فى ( ٠ ، ب )

تكون المعادله هى $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

---

**مثال ٨ أوجد معادله المستقيم الذى يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات ٤ وحدات ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات**

الحـــــــــل

$\because \frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٣} = ١$ بالضرب فى ١٢

$\therefore ٣س - ٤ص = ١٢$

---

**مثال ٩ أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والصادات للمعادله ٣س + ٥ص = ١٥**

الحـــــــــل

$\because ٣س + ٥ص = ١٥$ بالقسمة على ١٥

$\therefore \frac{٣س}{١٥} + \frac{٥ص}{١٥} = \frac{١٥}{١٥}$ $\therefore \frac{س}{٥} + \frac{ص}{٣} = ١$

$\therefore$ الجزء المقطوع من محور السينات هو ٥ وحدات والجزء المقطوع من محور الصادات هو ٣ وحدات

**طريقة حل اخرى ٣س + ٥ص = ١٥**

الجزء المقطوع من محور السينات نضع ص = ٠ $\therefore ٣س + ٠ = ١٥$ $\therefore س = \frac{١٥}{٣} = ٥$

الجزء المقطوع من محور الصادات نضع س = ٠ $\therefore ٠ + ٥ص = ١٥$ $\therefore ص = \frac{١٥}{٥} = ٣$

---

**تدريب ١ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يمر بالنقطتين ( ٥ ، ٠ ) ، ( ٠ ، -٧ )**

## ملاحظات هامه

١) شرط توازى مستقيمان $م_١ = م_٢$

٢) شرط تعامد مستقيمان $م_١ × م_٢ = -١$

---

**مثال ١٠ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يمر بالنقطه ( ١ ، ٢ )**

**موازياً المستقيم ٢ س + ٣ ص - ٦ = ٠ الحـــــــــل**

$∵ م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

ميل المستقم المعطى = $\frac{-٢}{٣}$ ، ∵ المستقيمان متوازيان ∴ $م_١ = م_٢ = \frac{-٢}{٣}$

$∴ \frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-٢}{٣}$

∴ ٣ ( ص - ٢ ) = -٢ ( س - ١ )

∴ ٣ص - ٦ = -٢س + ٢ ∴ ٢س + ٣ص - ٨ = ٠

---

**مثال ١٠ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يمر بالنقطه ( ٣ ، -٤ )**

**وعمودى على المستقيم س + ٢ ص - ٧ = ٠ الحـــــــــل**

$∵ م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

ميل المستقم المعطى = $\frac{-١}{٢}$ ، ∵ المستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم المطلوب = ٢

$∴ \frac{ص + ٤}{س - ٣} = ٢$

∴ ٢( س - ٣ ) = ص + ٤ ∴ ٢س - ٦ = ص + ٤

∴ ٢س - ص - ١٠ = ٠



أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

## المعادله المتجهه

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و} + ك\overrightarrow{ى}$

حيث $\overrightarrow{و}$ هى النقطه التى يمر بها المستقيم ، $\overrightarrow{ى}$ متجه فى إتجاه المستقيم ، ك ثابت لايساوى الصفر

### تدريبات سريعه

١) إذا كان ميل السقيم $\frac{٣}{٥}$ فإن المتجه $\overrightarrow{ى}$ = ..( ٥ ، ٣ )..............

٢) إذا كان ميل السقيم $\frac{-٢}{٣}$ فإن المتجه $\overrightarrow{ى}$ = ..( ٣ ، -٢ )..............

٣) إذا كان ميل السقيم ٤ فإن المتجه $\overrightarrow{ى}$ = ..( ١ ، ٤ )..............

٤) إذا كان $\overrightarrow{ى}$ ( ٣ ، ٢ ) فإن ميل المستقيم = ....... $\frac{٢}{٣}$ .......

٥) إذا كان $\overrightarrow{ى}$ ( -٣ ، ٢ ) فإن ميل المستقيم = ..... $\frac{-٢}{٣}$ .....

٦) إذا كان المتجه $\overrightarrow{ى}$ ( ٣ ، ٢ ) فإن المتجه العمودى هو ..... $\overrightarrow{ن}$ ( ٢ ، -٣ )

ممكن وضع المتجه العمودى على الصوره $\overrightarrow{ن}$ ( -٢ ، ٣ )

٧) إذا كان المتجه $\overrightarrow{ى}$ ( -٢ ، ١ ) فإن المتجه العمودى هو ..... $\overrightarrow{ن}$ ( ١ ، ٢ )

**مثال** أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطه $\overrightarrow{و}$ ( ٣ ، -٢ ) والمتجه $\overrightarrow{ى}$ ( -٢ ، ١ )

### الحـــــــــل

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و} + ك\overrightarrow{ى}$

= ( ٣ ، -٢ ) + ك ( -٢ ، ١ ) المعادله المتجهه

( س ، ص ) = ( ٣ ، -٢ ) + ك ( -٢ ، ١ )

س = ٣ - ٢ك ، ص = -٢ + ك المعادلتان البارامتريتان ( الوسيطيتان )

لإيجاد المعادله العامه ∵ م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ ∴ $\frac{ص + ٤}{س - ٣} = \frac{-١}{٢}$ حيث م = $\frac{١}{-٢} = \frac{-١}{٢}$

∴ س - ٣ = = -٢ ( ص + ٢ ) ∴ س + ٢ص + ١ = ٠


أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٢ أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، −٥)

ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية $\frac{3\pi}{4}$

الحـــــــــل

الميل = ظا $\frac{3\pi}{4}$ = ظا ١٣٥° = −١ ∴ الميل = $\frac{-1}{1}$ ∴ متجه اتجاه المستقيم ى (١ ، −١)

$\vec{ر} = \vec{ن} + ك \vec{ى}$ = (٣، −٥) + ك (١ ، −١) المعادله المتجهه

(س، ص) = (٣ ، −٥) + ك (١ ، −١)

س = ٣ + ك ، ص = −٥ − ك المعادلتان البارامتريتان (الوسيطيتان)

لإيجاد المعادله العامه ∵ م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ ∴ $\frac{ص + ٥}{س - ٣}$ = −١

∴ −١ (س − ٣) = ص + ٥

∴ − س + ٣ = ص + ٥ ∴ ص + س + ٢ = ٠

---

تدريب أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٤)

ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية $\frac{3\pi}{4}$

الحـــــــــل


أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٣ أوجد الصور المختلفه لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة $\vec{ق}$ ( -٣ ، ٢ )

وعمودى على المتجه $\vec{ن}$ ( ١ ، ٤ )

## الحــــــــل

متجه اتجاه المستقيم ى = ( ٤ ، -١ )      ،      م = $\frac{-١}{٤}$

$\vec{ر} = \vec{ق} + ك \vec{ى}$

= ( -٣ ، ٢ ) + ك ( ٤ ، -١ ) المعادله المتجهه

( س ، ص ) = ( -٣ ، ٢ ) + ك ( ٤ ، -١ )

س = -٣ + ٤ك      ،      ص = ٢ - ك      المعادلتان البارامتريتان ( الوسيطيتان )

لإيجاد المعادله العامه ∵ م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = $\frac{ص - ٢}{س + ٣}$ = $\frac{-١}{٤}$

٤( ص - ٢ ) = - ( س + ٣ )

∴ ٤ص - ٨ = - س - ٣      ∴ س + ٤ص - ٥ = ٠

---

تدريب٢ أوجد الصور المختلفه لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة $\vec{ق}$ (-١،١)

وعمودى على المتجه $\vec{ن}$ ( ٤، -٣ )

## الحــــــــل

**مثال ٤ أوجد الصور المختلفه لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين $\overleftarrow{و}$ ( ٣ ، -١ ) ، $\overleftarrow{ن}$ ( -٢ ، ٤ )**

## الحـــــــــل

الميل بمعلومية نقطتين م = $\frac{٤ + ١}{-٢ - ٣}$ = $\frac{٥}{-٥}$ ∴ ى ( -٥ ، ٥ )

$\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{و}$ + ك $\overleftarrow{ى}$ يمكن التعويض بأى نقطه

= ( ٣ ، -١ ) + ك ( -٥ ، ٥ ) المعادله المتجهه

( س ، ص ) = ( ٣ ، -١ ) + ك ( -٥ ، ٥ )

س = ٣ - ٥ ك ، ص = -١ + ٥ ك المعادلتان البارامتريتان ( الوسيطيتان )

لإيجاد المعادله العامه ∵ م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = $\frac{ص + ١}{س - ٣}$ = $\frac{٥}{-٥}$

٥ ( س - ٣ ) = - ٥(ص + ١)

∴ ٥س - ١٥ = -٥ص - ٥ ∴ ٥س + ٥ص - ١٠ = ٠ بالقسمة على ٥

∴ س + ص - ٢ = ٠

---

**مثال ٥ أوجد الصور المختلفه لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة ( ٣ ، ١ ) ويوازى المستقيم ٤س + ٣ص = ٥**

## الحـــــــــل

ميل المستقم المعطى = $\frac{-٤}{٣}$ ، ∵ المستقيمان متوازيان ∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٤}{٣}$

∴ ى = ( ٣ ، -٤ )

$\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{و}$ + ك $\overleftarrow{ى}$ يمكن التعويض بأى نقطه

= ( ٣ ، ١ ) + ك ( ٣ ، -٤ ) المعادله المتجهه

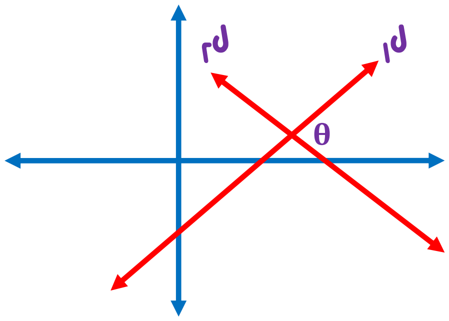
( س ، ص ) = ( ٣ ، ١ ) + ك ( ٣ ، -٤ ) أكمل المعادله العامه هى ٤س + ٣ص - ١٥ = ٠


أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

# قياس الزاويه بين مستقيمين

## الزاويه الحاده بين مستقيمين

$$\text{ظا}\,\theta = \left|\frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\,\text{م}_2}\right|$$




حيث $\text{م}_1$ هو ميل المستقيم الاول ، $\text{م}_2$ هو ميل المستقيم الثانى

---

**مثال** أوجد قياس الزاويه بين المستقيمان ٢س − ص = ٣ ، س + ص − ٥ = ٠

**الحـــــــــل**

$$\because \text{م}_1 = \frac{-2}{-1} = \frac{2}{1} = 2 \quad ، \quad \text{م}_2 = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\therefore \text{ظا}\,\theta = \left|\frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\,\text{م}_2}\right| = \left|\frac{2 + 1}{1 + 2 \times -1}\right| = \left|\frac{3}{1-2}\right| = \left|\frac{3}{1}\right| = 3$$

$$\theta = 71^\circ\ 34'$$

---

**تدريب** أوجد قياس الزاويه بين المستقيمان ٣س − ٤ص = ١ ، س + ٢ص − ٨ =

**الحـــــــــل**

**مثال٢ أوجد قياس الزاويه بين المستقيمان $\overrightarrow{ر}_١ = (٨ ، ٠) + ك (٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ر}_٢ = (٠ ، ٢) + ك (١ ، ٢)$**

**الحـــــــــل**

ى$_١$ = (٣ ، ١) ∴ م$_١$ = $\frac{١}{٣}$

ى$_٢$ = (١ ، ٢) ∴ م$_٢$ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

∴ ظا $\theta$ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$

= $\left|\frac{\frac{١}{٣} - ٢}{١ + \frac{١}{٣} \times ٢}\right|$ = $\left|\frac{\frac{-٥}{٣}}{\frac{٥}{٣}}\right|$ = $|-١|$ = ١ ∴ $\theta$ = ٤٥°

---

**مثال٣ أثبت أن النقاط أ (٦، ٥) ، ب (٦، ١) ، جـ (٣، ١) هى رؤوس مثلث ثم أوجد قياسات الزوايا الداخله للمثلث**

**الحـــــــــل**

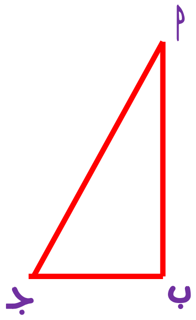
أب = $\sqrt{(٦ - ٦)^٢ + (١ - ٥)^٢}$ = $\sqrt{٠ + ١٦}$ = ٤

ب جـ = $\sqrt{(٣ - ٦)^٢ + (١ - ١)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ٠}$ = ٣

أ جـ = $\sqrt{(٣ - ٦)^٢ + (١ - ٥)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥ يجب ان يكون مجموع اصغر ضلعين اكبر من الضلع الثالث

∴ أب + ب جـ > أ جـ ∴ النقاط أ ، ب ، جـ تصلح أن تكون مثلث

∵ (أ جـ)$^٢$ = (أب)$^٢$ + (ب جـ)$^٢$ ∴ ∠ب قائمة ، ∠جـ ، ∠أ حاده




، لإيجاد ∠جـ نوجد ميل جـ أ ، جـ ب

م جـ أ = $\frac{١ - ٥}{٣ - ٦}$ = $\frac{-٤}{-٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، م جـ ب = $\frac{١ - ١}{٣ - ٦}$ = ٠

∴ ظا جـ = $\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}$ = $\frac{\frac{٤}{٣} - ٠}{١ + \frac{٤}{٣} \times ٠}$ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ∠جـ = ٥٣° ٧′ ٤٨″

، لإيجاد ∠أ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٥٣° ٧′ ٤٨″) = ٣٦° ٥٢′ ١٢″

**مثال ٣** إذا كان قياس الزاويه بين المستقيمين ل١ : س − ٢ص + ١ = ٠ ، ل٢ : س + ك ص + ٢ = ٠ يساوى ٤٥° أوجد قيمة ك

**الحـــــل**

∵ $م_١ = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{-١}{ك}$

∵ $ظا\ \theta = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right|$

∴ $ظا ٤٥ = \left| \frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك}}{١ + \left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{-١}{ك}\right)} \right|$

∴ $١ = \left| \frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك}}{١ - \frac{١}{٢ك}} \right|$

∴ $١ = \frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك}}{١ - \frac{١}{٢ك}}$

$\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك} = ١ - \frac{١}{٢ك}$

$\frac{١}{ك} + \frac{١}{٢ك} = ١ - \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{ك}\left(١ + \frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{ك}\left(\frac{٣}{٢}\right) = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{ك} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{١}{ك} = \frac{١}{٣}$ ∴ ك = ٣

∴ $\pm ١ = \frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك}}{١ - \frac{١}{٢ك}}$

∴ $-١ = \frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك}}{١ - \frac{١}{٢ك}}$

$\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك} = -١ + \frac{١}{٢ك}$

$\frac{١}{٢} + ١ = \frac{١}{ك} + \frac{١}{٢ك}$

∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{١}{ك}\left(١ + \frac{١}{٢}\right)$

∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{١}{ك}\left(\frac{٣}{٢}\right)$

∴ $\frac{٣}{٢} \times \frac{٢}{٣} = \frac{١}{ك}$

∴ $\frac{١}{ك} = ١$ ∴ ك = ١

---

**مثال هام** إذا كان س = ٣ ، ص = ٢ فإن الزاويه بين المستقيمان = ............ ٩٠ درجه

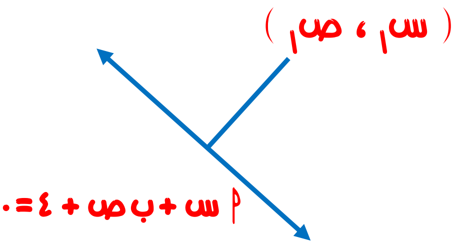


أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

# طول العمود المرسوم من نقطه الى مستقيم

## إيجاد طول العمود

فى الشكل المقابل :




$$\text{ل} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 - \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$$

---

**مثال١ أوجد طول العمود الساقط من ( −٢ ، ٥ ) ، على المستقيم ٣س + ٤ص + ٦ = ٠**

$$\because \text{ل} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 - \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$$

$$= \frac{|٣\text{س} + ٤\text{ص} + ٦|}{\sqrt{٣^2 + ٤^2}}$$

$$= \frac{|٣ \times -٢ + ٤ \times ٥ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٣٠}{٥} = ٦ \text{ وحدة طول}$$

$$= \frac{|-٦ + ٢٠ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$$

---

**مثال٢ أوجد طول العمود الساقط من ( ٧ ، −٢ ) على المستقيم الذى يمر بالنقطتين ( ٥ ، −١ ) ، ( ٢ ، ٣ )**

لإيجاد معادلة المستقيم : $\text{م} = \frac{٣ + ١}{٢ - ٥} = \frac{٤}{-٣} = \frac{-٤}{٣}$

معادلة المستقيم $\because \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \text{م}$ ، $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٢} = \frac{-٤}{٣}$

$$٣(\text{ص} - ٣) = -٤(\text{س} - ٢)$$

$\therefore ٣\text{ص} - ٩ = -٤\text{س} + ٨$ $\therefore ٤\text{س} + ٣\text{ص} - ١٧ = ٠$

$$\because \text{ل} = \frac{|٤\text{س} + ٣\text{ص} - ١٧|}{\sqrt{٤^2 + ٣^2}}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{|٤ \times ٧ + ٣ \times -٢ - ١٧|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|٢٨ - ٦ - ١٧|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٥}{٥} = ١$$

مثال٣ أوجد طول العمود المرسوم من النقطه ( ٣ ، ٥ ) الى المستقيم $\overset{\frown}{ر}$ = ( -١ ، ٢ ) + ك ( ٤ ، -٣ )

## الحــــــــل

معادلة المستقيم ∵ $م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ $\frac{ص - ٢}{س + ١} = \frac{-٣}{٤}$

٤ ( ص - ٢ ) = - ٣ ( س + ١ )

∴ ٤ص - ٨ = - ٣س - ٣

∴ ٣ س + ٤ص - ٥ = ٠

∵ ل = $\frac{|٣س + ٤ص - ٥|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}}$

ل = $\frac{|٣ \times ٣ + ٤ \times ٥ - ٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ = $\frac{|٩ + ٢٠ - ٥|}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{٢٤}{٥}$

---

تدريب١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطه ( -٢ ، ٣ ) الى المستقيم $\overset{\frown}{ر}$ = ( ١ ، ٣ ) + ك ( ٤ ، ٣ )

---

تدريب٢ أوجد طول العمود الساقط من أ ( ٢ ، ٤ ) المار بالنقطه ب ( -٢ ، ٠ ) وميله $\frac{٢٤}{٥}$

**مثال ٤ أثبت أن المستقيم ٣ س + ٤ص = ٣ يوازى المستقيم المار بالنقطتين ( ١ ، -٢ ) ، ( -٣ ، ١ )**

**وأوجد البعد بينهما**

## الحل

$\because$ م$_1$ = $\frac{-٣}{٤}$ ، م$_2$ = $\frac{١ + ٢}{-٣ - ١}$ = $\frac{٣}{-٤}$ = $\frac{-٣}{٤}$

$\because$ م$_1$ = م$_2$ = $\frac{-٣}{٤}$ $\therefore$ المستقيمان متوازيان

ولإيجاد طول العمود المرسوم من النقطة ( ١ ، -٢ ) للمستقيم ٣ س + ٤ص - ٣ = ٠

$\because$ ل = $\frac{|٣س + ٤ص - ٣|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}}$

ل = $\frac{|٣ \times ١ + ٤ \times -٢ - ٣|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ = $\frac{|٣ - ٨ - ٣|}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{|-٨|}{٥}$ = $\frac{٨}{٥}$ = ١.٦ وحدة طول

---

**مثال ٥ أثبت أن المستقيم ر = ( ٠ ، ٤ ) + ك ( ١ ، -٢ ) يوازى المستقيم ٢س + ص + ٢ = ٠**

**وأوجد البعد بينهما**

## الحل

$\because$ م$_1$ = $\frac{-٢}{١}$ ، م$_2$ = $\frac{-٢}{١}$

$\because$ م$_1$ = م$_2$ = $\frac{-٢}{١}$ $\therefore$ المستقيمان متوازيان

ولإيجاد طول العمود المرسوم من النقطة ( ٠ ، ٤ ) للمستقيم ٢ س + ص + ٢ = ٠

$\because$ ل = $\frac{|٢س + ص + ٢|}{\sqrt{٢^٢ + ١^٢}}$

ل = $\frac{|٢ \times ٠ + ٤ + ٢|}{\sqrt{٤ + ١}}$ = $\frac{|٦|}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{٦}{\sqrt{٥}}$

# المعادله العامه للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمان

**مثال ١** أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمان

$ل_1$ : ٣ س + ٢ص – ٧ = ٠ ، $ل_2$ : س + ٣ص – ٧ = ٠ ومار بالنقطه ( ٣ ، ١ )

## الحـــــــــل

أولاً نوجد نقطة تقاطع المستقيمان جبرياً أو باستخدام الاله

جبرياً بضرب المعادله الثانيه فى –٣ ∴ –٣ س – ٩ ص + ٢١ = ٠ وجمع المعادلتين

٣ س + ٢ص – ٧ = ٠

–٣ س – ٩ ص + ٢١ = ٠

–٧ ص + ١٤ = ٠ ∴ –٧ ص = –١٤ ∴ ص = $\frac{-١٤}{-٧}$ = ٢

وبالتعويض فى المعادله الثانيه ∴ س = ١

∴ نقطة تقاطع المستقيمان هى ( ١ ، ٢ )

لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ( ٣ ، ١ ) ، ( ١ ، ٢ ) م = $\frac{٢ - ١}{١ - ٣}$ = $\frac{١}{-٢}$ = $\frac{-١}{٢}$

∵ م = $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$

∴ $\frac{ص - ١}{س - ٣}$ = $\frac{-١}{٢}$

٢( ص – ١ ) = – ( س – ٣ )

∴ ٢ص – ٢ = – س + ٣ ∴ س + ٢ص – ٥ = ٠


أ/ أحمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

**مثال٢ أوجد معادلة معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمان**

ل١ : ٣س + ٢ص = ١٠ ، ل٢ : ٥س – ٣ص – ٤ = ٠

وعمودى على المستقيم ٢س + ٧ص – ٤ = ٠

## الحـــــــــل

**أولاً نوجد نقطة تقاطع المستقيمان جبرياً أو باستخدام الاله**

∴ نقطة تقاطع المستقيمان هى ( ٢ ، ٢ )

ميل المستقيم ٢س + ٧ص – ٤ = ٠ م = $\frac{-٢}{٧}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{٧}{٢}$

∵ $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م

∴ $\frac{ص - ٢}{س - ٢}$ = $\frac{٧}{٢}$

٢(ص – ٢) = ٧ ( س – ٢ )

∴ ٢ص – ٤ = ٧س – ١٤ ∴ ٧س + ٢ص + ١٠ = ٠

---

**تدريب١ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمان**

ل١ : س + ٢ص – ٥ = ٠ ، ل٢ : ٢س – ٣ص + ٤ = ٠ ومار بالنقطة ( –١ ، ٠ )

**مثال ٣ أوجد المعادله المتجه للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمان**

**$ل_1$ : ٣س + ٢ص = ١٠ ، $ل_2$ : ٥س - ٣ص - ٤ = ٠**

**ويصنع زاويه ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات**

## الحـــــــــل

**أولاً نوجد نقطة تقاطع المستقيمان جبرياً أو باستخدام الاله**

∴ نقطة تقاطع المستقيمان هى ( ٢ ، ٢ )

**ميل المستقيم** م = ظا١٣٥ = -١ ∴ ى = ( -١ ، ١ )

∴ $\overleftarrow{ر}$ = ( ٢، ٢ ) + ك ( -١ ، ١ )





أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩